

**Festigkeitsanalyse
von Radiallaufrädern beliebiger Bauform
unter mechanischer und thermischer Belastung**

DISSERTATION

**zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Fakultät für Maschinenbau
Ruhr-Universität Bochum**

von

MARIUS GELLER

Bochum

1985



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Festigkeitsanalyse
von Radiallaufrädern beliebiger Bauform
unter mechanischer und thermischer Belastung

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des Grades Doktor-Ingenieur
der Fakultät für Maschinenbau
Ruhr-Universität Bochum

von

M A R I U S G E L L E R

Bochum

1985

Doktorarbeit eingereicht am 23.10.1985

Tag der mündlichen Prüfung am 06.12.1985

Referent: Professor Dr.-Ing. W. Fister

Korreferent: Professor Dr.-Ing. H. Waller

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen der Ruhr-Universität Bochum.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Fister, der das Promotionsverfahren wegen seines plötzlichen Todes nicht mehr zu Ende führen konnte. Er hat diese Arbeit angeregt, mit großem Interesse betreut und tatkräftig gefördert. Durch seinen fachlichen Rat sowie seine zahlreichen Hinweise hat er wesentlich zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen.

Nach dem Tod von Herrn Professor Fister hat Herr Prof. Dr.-Ing. H. Pfost mit spontaner Hilfsbereitschaft die Betreuung übernommen und wesentlich dazu beigetragen, daß das Promotionsverfahren abgeschlossen werden konnte. Hierfür sei ihm herzlich gedankt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferates, seinen fachlichen Rat sowie für die kritische Durchsicht der Arbeit.

Allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Fluidenergiemaschinen gebührt mein herzlicher Dank für ihre Hilfsbereitschaft und die vielen anregenden Diskussionen. Dieser gilt insbesondere meinem Kollegen Herrn Dipl.-Ing. M. Thiele für seine Unterstützung bei der Erstellung der umfangreichen Software.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei an dieser Stelle für die finanzielle Förderung des Forschungsvorhabens sowie die Bereitstellung der Infrarot-Wärmebildkamera gedankt.

Nicht unerwähnt lassen möchte ich die Unterstützung meiner Ehefrau und meiner Eltern. Insbesondere danke ich meiner Mutter für die Hilfe bei der Anfertigung der Druckvorlage.

Bochum, im Dezember 1985

Marius Geller

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
Verwendete Formelzeichen und Bezeichnungen	
1. <u>Einleitung</u>	1
2. <u>Voraussetzungen für die Rechnungen und allgemeine Vereinbarungen</u>	4
2.1 Laufradbauformen und geometrische Voraussetzungen	4
2.2 Belastungsarten der Laufräder	5
2.3 Werkstoffverhalten und Spannungszustand	7
2.4 Vereinbarungen zur Ergebnisdarstellung	9
2.5 Umrechnung der Rechenergebnisse bei geänderten Parametern	11
3. <u>Experimentelle Erfassung der Laufradoberflächen-temperaturverteilung mittels Infrarotthermografie</u>	14
3.1 Versuchslaufrad und Versuchsstand	15
3.2 Grundlagen der Infrarotthermografie	21
3.3 Systematischer Meßfehler durch Hintergrundstrahlung	25
3.3.1 Einfluß der Emissionszahl	25
3.3.2 Kompensation des systematischen Meßfehlers	31
3.4 Infrarotthermografie im rotierenden Radiallaufrad	35
3.4.1 Verwendete Infrarotkamera	35
3.4.2 Funktionsprinzip der Infrarotkamera	39
3.4.3 Messung im rotierenden Laufrad	41

4. <u>Berechnung der Laufradtemperaturverteilung</u> <u>aus Wärmeübergangsgesetzen</u>	51
4.1 Voraussetzungen für die Berechnung	52
4.2 Wärmeübergang auf der Laufradoberfläche	55
4.2.1 Wärmeübergang bei hohen Geschwin- digkeiten	56
4.2.2 Wärmeübergang im Laufradkanal	58
4.2.3 Wärmeübergang am Laufradeinlauf	59
4.2.4 Wärmeübergang auf der Laufrad- rückseite	60
4.3 Geschwindigkeitsverteilung im Laufrad- kanal und ergänzende Messungen mit dem Laser-Zwei-Fokus-Verfahren	62
4.3.1 Analytisch berechnete Geschwindig- keitsverteilung	63
4.3.2 Gemessene Geschwindigkeitsverteilung	66
4.4 Berechnete Laufradtemperaturverteilung und Vergleich mit Meßergebnissen	73
5. <u>Festigkeitsanalyse von zwei Radiallaufrädern</u> <u>unter Fliehkraftbelastung, ungleichförmiger</u> <u>Temperaturverteilung und Nabenvorspannung</u>	84
5.1 Rechenergebnisse eines halboffenen Laufrades	91
5.2 Rechenergebnisse eines geschlossenen Laufrades	98
6. <u>Vergleichende Darstellung der Fliehkraftbean- spruchung von vier Radiallaufrädern unterschied- licher Bauform</u>	105
6.1 Rechenergebnisse zweier halboffener Lauf- räder	108
6.1.1 Laufrad mit prismatischen Schaufeln	108

6.1.2 Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln	114
6.2 Rechenergebnisse zweier geschlossener Laufräder	120
6.2.1 Laufrad mit prismatischen Schaufeln	121
6.2.2 Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln	127
7. <u>Schwingungsanalyse von Radialverdichterschaufeln</u>	135
7.1 Voraussetzungen für die Berechnung	136
7.2 Eigenwertrechnung einer Radialverdichter- schaufel	139
8. <u>Zusammenfassung</u>	149
Anhang 1 <u>Grundlagen des Finite-Element-Verfahrens</u>	154
A1.1 20-Knoten-Element der Serendipity-Klasse	154
A1.2 Verformungsverlauf und Knotenverformungen	155
A1.3 Formfunktionen und Koordinatentransfor- mation	157
A1.4 Spannungs- und Dehnungsbeziehungen	159
A1.5 Prinzip der virtuellen Verrückung	166
A1.6 Berücksichtigung der Fliehkraft	169
A1.7 Berücksichtigung der Temperaturdehnungen	171
A1.8 Compilation des Gesamtsystems	172
A1.9 Berücksichtigung von Randbedingungen	177
Anhang 2 <u>Berechnung der Laufradtemperaturver- teilung mit dem Finite Element-Verfahren</u>	181
A2.1 Laplacesche Wärmeverteilungsgleichung	181
A2.2 Variationsfunktional des Wärmeleitungs- problems	183

A2.3	Lösung des Variationsfunktional nach der Finite-Element-Methode	186
Anhang 3	<u>Eigenwertberechnung nach dem Finite-Element-Verfahren</u>	194
A3.1	Bestimmung der Eigenwertgleichung	194
A3.2	Lösung der Eigenwertgleichung	196
Anhang 4	<u>Messung der Geschwindigkeitsverteilung mit dem Laser-Zwei-Fokus-Verfahren</u>	199
A4.1	Funktionsprinzip des Meßverfahrens	199
A4.2	Messung im rotierenden Laufrad	204
	<u>Literaturverzeichnis</u>	208

Verwendete Formelzeichen und Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

a	spezifische Arbeit
A	Fläche
[a]	Knotenverformungen
[b]	spezifische Volumenbelastung
[B]	Dehnungsmatrix
c	Absolutgeschwindigkeit
c_p	spezifische Wärmekapazität
[D]	Elastizitätsmatrix
E	Elastizitätsmodul, Strahlungsenergie
f	Frequenz
[F]	Belastungsvektor
[f]	Verformungsvektor
h	Enthalpie
[I]	Einheitsmatrix
[J]	Jakobi-Matrix
[K]	Steifigkeitsmatrix
l	Lauf­länge
[L]	Operatormatrix
[M]	Massenmatrix
N	Drehzahl
[N]	Formfunktionen
Nu	Nusseltzahl
O	Oberfläche
p	Druck
[p]	spezifische Volumenbelastung
Pr	Prandtlzahl
$\dot{q}$	Wärmestromdichte
[q]	Knotenkräfte
r, φ, z	Zylinderkoordinaten
Re	Reynoldszahl
[s]	spezifische Oberflächenbelastung
T	Temperatur
t	Zeit
u	Umfangsgeschwindigkeit

1. Einleitung

Die heutigen Entwicklungstendenzen im Strömungsmaschinenbau führen zu zunehmend höher belastbaren Laufrädern. Im Vordergrund der Forschungsarbeiten an Radialverdichterlaufrädern steht neben der strömungstechnisch optimalen Formgebung der Laufradkanäle die Frage nach der konstruktiven Auslegung des gesamten Laufrades hinsichtlich einer festigkeitsgerechten Gestaltung. In der Praxis stellen häufig festigkeitsmechanische Überlegungen die Grenze einer Konzeption dar, obwohl diese aus fluiddynamischer Sicht eine weitere Steigerung der Laufradbelastung zulassen würde.

Entsprechend der Notwendigkeit, über die mechanische Belastung eines Laufrades gezielte Aussagen machen zu können, werden neben analytischen Berechnungsunterlagen eine Reihe von numerischen Lösungsmethoden auf Radialverdichterlaufräder angewendet.

Neben dem Gitterrostverfahren, das von einem zweiachsigen Spannungszustand innerhalb der Laufradgeometrie ausgeht /12, 13, 17/, hat insbesondere das Verfahren der Finiten Elemente, das in dieser Arbeit verwendet wird, seine Leistungsfähigkeit zur Berechnung des dreiachsigen Spannungszustandes erwiesen /11/.

Um bei Prüfstandsversuchen oder in der Fertigung die erforderliche Betriebssicherheit gewährleisten zu können, ist das Ziel dieser Arbeit die statische Festigkeitsanalyse von Radiallaufrädern beliebiger Bauform unter Berücksichtigung nahezu aller in der Praxis vorkommenden Belastungsarten sowie die dynamische Festigkeitsanalyse von Laufrädern ohne Deckscheibe.

Bei der statischen Festigkeitsanalyse ist als Hauptbelastung die Fliehkraft zu berücksichtigen, die bei vorliegender Geometrieaufbereitung mathematisch beschrieben werden kann. Die zusätzliche Einbeziehung des Temperatureinflusses aufgrund der ungleichförmigen Erwärmung des Laufrades ist

vergleichsweise aufwendig, weil für diese Berechnungen die dreidimensionale Temperaturverteilung im Laufradkörper bekannt sein muß. Auf die Erfassung dieses Einflusses ist in dieser Arbeit besonderes Augenmerk gerichtet.

Da eine Abschätzung bzw. Berechnung der Temperaturverteilung wegen fehlender Angaben über die Wärmeübergangszahlen nur unzulänglich durchgeführt werden kann, wird die benötigte Oberflächentemperaturverteilung des Laufrades zunächst durch Messungen ermittelt (Abschnitt 3). Wegen der Notwendigkeit, die Messungen im rotierenden Laufrad unter Betriebsbedingungen durchzuführen, wird als Meßverfahren die Infrarotthermografie eingesetzt, welche die berührungsfreie Messung von Oberflächentemperaturen gestattet. Zur Messung wird eine Infrarotwärmebildkamera mit hoher geometrischer und thermischer Auflösung verwendet.

Um auf aufwendige Messungen verzichten zu können, ist die theoretische Erfassung der sich im Betrieb einstellenden Laufradtemperaturverteilung wünschenswert. Zur Formulierung der örtlichen Wärmeübergangsgesetze müssen der thermodynamische Zustand sowie die Geschwindigkeitsverteilung des Fluids auf der gesamten Laufradoberfläche bekannt sein. Während zur Abschätzung des Wärmeüberganges auf der Laufradrückseite als rotierende Scheibe auf bereits bekannte Ansätze zurückgegriffen werden kann /51/, ist ein analoges Vorgehen auf der Vorderseite des Laufrades wegen der komplizierten Strömungsverhältnisse im Laufradkanal nicht ohne weiteres möglich. Hierbei kann allerdings davon ausgegangen werden, daß durch den Einsatz moderner Verfahren zur Strömungsrechnung und -messung in Zukunft verwertbare Aussagen über die Geschwindigkeitsverteilung sowie über die jeweiligen örtlichen thermodynamischen Zustände im Laufradkanal vorliegen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit muß deshalb zur Berechnung der benötigten Wärmeübergangszahlen und Fluidtemperaturen auf Annahmen zurückgegriffen werden, um zu Aussagen zu gelangen, welche die Berechnung der Laufradtemperaturverteilung aus

dem gasseitigen Wärmeübergang gestatten (Abschnitt 4). Die dazu benötigte Geschwindigkeitsverteilung wird ergänzend zu der zweidimensional, reibungsfrei berechneten Geschwindigkeitsverteilung in einem Versuchslaufrad mit dem Laser-Zwei-Fokus-Verfahren gemessen.

Der Einfluß der ungleichförmigen Laufradtemperaturverteilung auf den Spannungs- und Dehnungszustand wird anhand eines halboffenen Laufrades und eines geschlossenen Laufrades aufgezeigt (Abschnitt 5), wobei zusätzlich die Auswirkungen einer Nabenvorspannung berücksichtigt sind.

Um die Verformungen und Spannungen eines Laufrades abhängig von der gewählten Bauform beurteilen zu können, sind in einem gesonderten Abschnitt durch eine Gegenüberstellung vier verschiedener Laufräder (mit/ohne Deckscheibe, prismatische/räumlich verwundene Schaufeln) die fliehkraftbedingten Spannungen und Dehnungen vergleichend diskutiert (Abschnitt 6). Dies erlaubt es dem Konstrukteur eines Radialverdichters, bereits vor der endgültigen Auslegung einer Stufe die Frage nach der zu realisierenden Bauform zu klären, da in die Entscheidung für ein bestimmtes Laufradkonzept neben thermo- und fluidynamischen Überlegungen auch festigkeitsgerechte einzubeziehen sind.

Neben der statischen Beanspruchung können Laufräder durch ihr dynamisches Verhalten in ihrer Betriebssicherheit gefährdet sein. Aus diesem Grunde ist die Schwingungsanalyse von Radialverdichterschaufeln in diese Arbeit mit einbezogen (Abschnitt 7). Die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen ist für ein schnellläufiges Laufrad mit in den Saugmund vorgezogenen Schaufeln dargestellt, da diese Bauform aufgrund ihrer großen Schaufelflächen besonders gefährdet ist.

Die im Rahmen dieser Arbeit benötigten mathematischen Zusammenhänge zur statischen und dynamischen Festigkeitsanalyse sowie zur Temperaturrechnung sind in einem Anhang zusammengefaßt.

2. Voraussetzungen für die Rechnungen und allgemeine Vereinbarungen

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Voraussetzungen und Annahmen dargestellt, die im Rahmen dieser Arbeit zur statischen und dynamischen Festigkeitsanalyse sowie zur Berechnung der Temperaturverteilung benutzt worden sind.

2.1 Laufradbauformen und geometrische Voraussetzungen

Mit Hilfe eines angefertigten Programmsystems zur Festigkeitsanalyse von Radiallaufrädern lassen sich nahezu alle in der Praxis vorkommenden Laufradbauformen nachbilden. Hierbei ermöglicht ein speziell auf die Geometrieaufbereitung von Radiallaufrädern konzipierter Geometrieprozessor die Nachbildung einzelner Laufradformen mit minimalen Datenmengen. Dadurch wird die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Gestaltung des Datensatzes verringert. Die analysierbaren Laufradbauformen sind in Bild 2.01 als Meridianschnitte dargestellt.

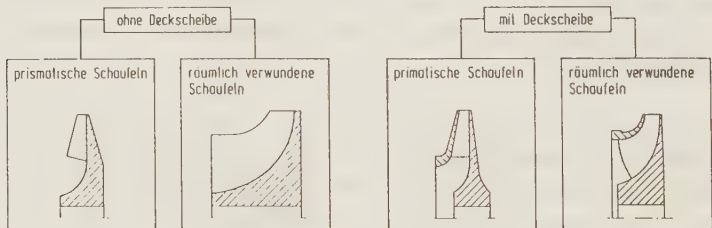


Bild 2.01: Analysierbare Laufradbauformen

Die Nachbildung von Rad- und Deckscheibe erfolgt durch die Angabe von r - und z -Koordinaten an ausgewählten Punkten. Der Verlauf der Schaufel wird durch die Angabe des Umfangswinkels φ an einzelnen Knotenpunkten festgelegt, so daß

auch die Nachbildung von räumlich verwundenen Schaufeln möglich ist. Es kann eine beliebige Verteilung der Schaufelstärke berücksichtigt werden. Die zur Rechnung benötigte projizierte Schaufelstärke in Umfangsrichtung wird aus dem Verlauf der Schaufelfläche berechnet.

In dem Programmsystem wird eine periodische Rotationssymmetrie eines Laufrades entsprechend der Schaufelteilung vorausgesetzt. Diese Voraussetzung trifft auf fast alle praxisüblichen Laufräder zu. Eine Ausnahme stellen extrem schnellläufige Laufradbauformen dar, bei denen aus Gründen einer Verankerung der Schaufelversperrung jede zweite Schaufeleintrittskante im Vergleich zur jeweiligen Nachbarschaufel in den Saugmund zurückgezogen ist.

Die Voraussetzung einer geometrischen Rotationssymmetrie hat bei homogenen Werkstoffen mit isotropen Eigenschaften eine entsprechende Rotationssymmetrie des Verformungs- und Spannungszustandes zur Folge. Diese Tatsache ermöglicht es erst, die dreidimensionale Festigkeitsanalyse eines Radiallaufrades mit der erforderlichen Elemententeilung durchzuführen, da nunmehr die Berechnung eines herausgeschnittenen Laufradsektors zur Festigkeitsanalyse eines gesamten Laufrades ausreicht. Die Formulierung von Randbedingungen an den Schnittgrenzen des Laufradsektors stellt die Berücksichtigung der Periodizität in der Rechnung sicher (Anhang A1.8).

2.2 Belastungsarten der Laufräder

Die Belastungsarten, die mit dem Programmsystem berücksichtigt werden können, zeigt Bild 2.02.

Als Hauptbelastung muß die Fliehkraft angesehen werden. Der Einfluß der ungleichförmigen Temperaturverteilung des Laufrades, welche durch die Verdichtung des durchströmenden Fluides sowie durch die Radseitenreibung verursacht wird, kann bei bekannter Laufradtemperaturverteilung zusätzlich berücksichtigt werden.

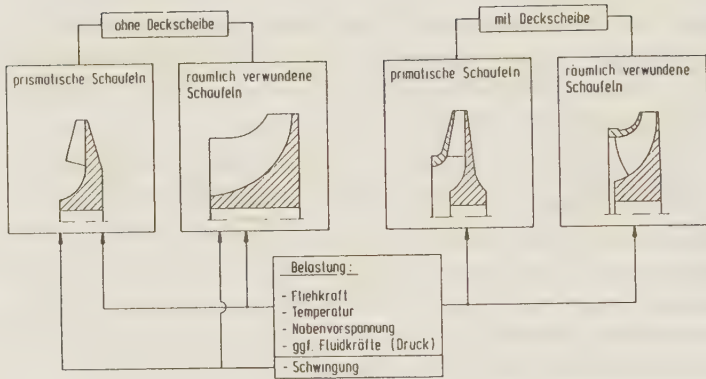


Bild 2.02: Analysierbare Belastungsarten

Die zusätzliche Berücksichtigung der ungleichförmigen Laufradtemperaturverteilung ist grundsätzlich für eine Festigkeitsanalyse mit einer Nabenvorspannung angezeigt, da die temperaturbedingten Nabendehnungen einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf den Schrumpfsitz ausüben.

Bei vorgegebener Druckverteilung auf der Laufradoberfläche können auch Fluidkräfte berücksichtigt werden. Diese Belastung gewinnt vornehmlich für Pumpenlaufräder eine einflußnehmende Bedeutung auf den Spannungs- und Dehnungszustand, kann aber bei Laufrädern zur Gasförderung im allgemeinen vernachlässigt werden /15/. Dies gilt vor allem dann, wenn atmosphärische Ansaugbedingungen vorliegen.

Für Laufräder ohne Deckscheibe kann zusätzlich eine Schwingungsanalyse der Schaufeln durchgeführt werden. Die exakte Berechnung von Schaufelschwingungen erfordert die Analyse des gesamten Laufrades, da im Gegensatz zur statischen Festigkeitsanalyse nicht von einer periodischen Rotations-

symmetrie ausgegangen werden kann. Dabei ist die gegenseitige Koppelung der Schaufeln über die Radscheibe zu berücksichtigen. Ebenso muß beachtet werden, daß die Radscheibe als elastisches Bauteil ihrerseits ein schwingungsfähiges Gebilde darstellt, das auf das Schwingungsverhalten der Schaufeln Rückwirkungen ausübt.

Allerdings ist mit den heute zur Verfügung stehenden Rechnerkapazitäten eine Schwingungsanalyse des gesamten Laufrades noch nicht möglich, so daß im Rahmen dieser Arbeit die Schwingungsanalyse auf einen herausgeschnittenen Sektor beschränkt bleibt. Diese Voraussetzung liefert für die Praxis ausreichend genaue Ergebnisse, wenn bei dem berechneten Rad die Radscheibe im Vergleich zu den Schaufeln als relativ starr angesehen werden kann.

2.3 Werkstoffverhalten und Spannungszustand

Sowohl zur statischen als auch zur dynamischen Festigkeitsanalyse wird von einem dreiachsigen Spannungszustand ausgegangen, so daß der vollständige dreiachsige Spannungstensor berechnet werden muß. Dabei wird die Gültigkeit des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt (Anhang A1.4). Es wird rein elastisches Materialverhalten angenommen. Diese Voraussetzung trifft auf Radialverdichterlaufräder mit guter Näherung zu, da sie fast ausschließlich aus metallischen Werkstoffen gefertigt sind, die bis zu ihrer Streckgrenze einen nahezu konstanten Elastizitätsmodul aufweisen.

Das vorausgesetzte lineare Elastizitätsverhalten des Materials hat zur Folge, daß diejenigen berechneten Spannungswerte, welche die Größenordnung der Streckgrenze des Materials erreichen oder überschreiten, im allgemeinen zu groß berechnet werden. Diese Tatsache ist auf den Verlauf der Dehnungskurve im Spannungs-Dehnungsdiagramm zurückzuführen. In Bild 2.03 ist die Spannungs-Dehnungskurve eines duktilen metallischen Werkstoffes qualitativ dargestellt.

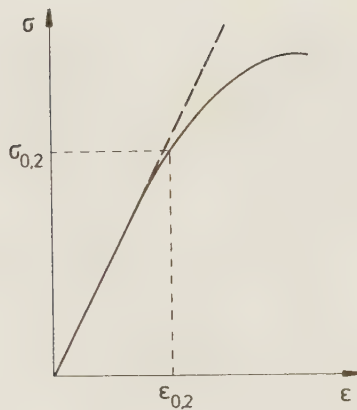


Bild 2.03: Spannungs - Dehnungsdiagramm
eines duktilen metallischen Werkstoffes

Wie aus dem Bild zu erkennen ist, verläuft der Zusammenhang zwischen der Spannung σ und der Dehnung ϵ nur bis zur Dehngrenze $\sigma_{0,2}$ nahezu linear. Oberhalb $\sigma_{0,2}$ nimmt die Kurve einen flacheren Verlauf an. Die in Bild 2.03 gestrichelt eingezeichnete Verlängerung der Hookeschen Geraden entspricht einem konstanten E-Modul über die $\sigma_{0,2}$ Dehngrenze hinaus.

Durch einen Vergleich des tatsächlichen Kurvenverlaufes mit dem gestrichelt dargestellten Verlauf ist zu ersehen, daß sich für die Spannungen σ zu große Werte ergeben, wenn die örtlichen Dehnungen die Dehngrenze $\epsilon_{0,2}$ übersteigen. Obwohl diese Feststellung nur für den einachsigen Zugversuch exakt gültig ist, kann der Zusammenhang auf den dreiachsigen Spannungszustand qualitativ übertragen werden.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen setzen isotropes Werkstoffverhalten voraus. Grundsätzlich ist es auch möglich, anisotropes Material im Rechenprogramm zu berücksichtigen. Hierzu werden allerdings die richtungsabhängigen Materialkonstanten benötigt.

2.4 Vereinbarungen zur Ergebnisdarstellung

Zur Ergebnisdarstellung werden in den folgenden Abschnitten neben den Vergleichsspannungen nur die Radialspannungen σ_r und die Tangentialspannungen σ_φ benutzt, obwohl aufgrund der Verwendung von dreidimensionalen finiten Elementen der vollständige Spannungstensor berechnet wird. Die Begründung liegt in der Tatsache, daß die Axialspannungen σ_z und insbesondere die Schubspannungen τ im Vergleich zu den Radial- und Tangentialspannungen wesentlich geringere Werte annehmen.

Um die jeweilige örtliche, effektive Belastung bei vorliegendem dreiachsigen Spannungszustand beurteilen zu können, ist die Angabe einer Vergleichsspannung angebracht. Hiermit lassen sich relativ schnell gefährdete Bereiche des Laufrades feststellen, wobei allerdings aufgrund des Informationsverlustes, der sich bei der Berechnung der Vergleichsspannungen ergibt, eine Klärung der Ursache für eventuelle Spannungsspitzen erschwert wird. Zur Beurteilung der Belastungsursachen sind die jeweilig vorhandenen Radial- bzw. Tangentialspannungen aber aussagefähiger. Deshalb wird deren Darstellung im folgenden grundsätzlich der Vorrang gegeben.

Die zusätzlich angegebenen Vergleichsspannungen σ_v werden für die in Frage kommenden elastischen Laufradwerkstoffe sinnvollerweise nach der Gestaltänderungsenergiehypothese berechnet:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{(\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_\varphi \sigma_z + \sigma_z \sigma_r)}{+ 3 (\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{zr}^2)}} \quad (2.01)$$

Die in den folgenden Abschnitten in Form von graphischen Kurvenverläufen dargestellten Ergebnisse sind für den Schnitt A-A wiedergegeben, dessen Verlauf in Bild 2.04 anhand zweier halboffener Laufräder gezeigt ist. Der Schnitt A-A entspricht dem Verlauf der Schaufelskelettlinie.

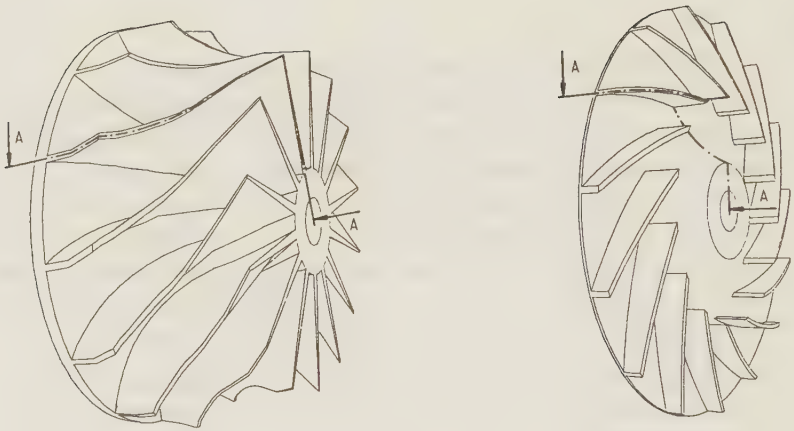


Bild 2.04: Lage des Schnittes A-A zur graphischen Darstellung der Ergebnisse

Für die Darstellung der Spannungsverläufe mittels Isolinien sind ihre Stützstellen so gewählt, daß sich eine äquidistante Einteilung zwischen der Minimal- und Maximalspannung des gesamten Laufrades ergibt. Der kleinste bzw. größte dargestellte Isolinienwert besitzt einen gewissen Abstand von der Minimal- bzw. Maximalspannung (Bild 2.05), da diese Linien sich sonst zu einem Punkt reduzieren würden und auf der Zeichnung nicht erkennbar wären.

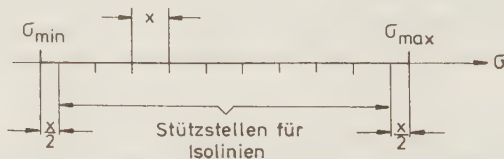


Bild 2.05: Zur Einteilung der Isolinienwerte in Abhängigkeit der Minimalspannung $\sigma_{\min}$ und der Maximalspannung $\sigma_{\max}$

2.5 Umrechnung der Rechenergebnisse bei geänderten Parametern

Die dargestellten Rechenergebnisse zur Festigkeitsanalyse sind sowohl für die Verformungen als auch für die Spannungen in dimensionsbehafteten Größen wiedergegeben, wobei immer die jeweiligen Betriebsbedingungen der Laufräder mit angegeben sind.

Falls keine Nabenvorspannungen berücksichtigt sind, können die berechneten Werte mit Hilfe der im folgenden dargelegten Proportionen auf andere Werkstoffe, Betriebsbedingungen und Laufradabmessungen bei Wahrung der geometrischen Ähnlichkeit umgerechnet werden. Es wird zunächst nur der Fliehkrafteinfluß betrachtet.

Um zu dimensionslosen Beziehungen zu gelangen, kann die in Anhang A1.6 hergeleitete Steifigkeitsbeziehung

$$[K] [a] = [F] \quad (A1.37)$$

verwendet werden. Die dimensionslosen Kenngrößen werden im folgenden durch einen Stern gekennzeichnet. Mit Gleichung A1.38 folgt für die dimensionslose Steifigkeitsmatrix $[K]^*$:

$$[K]^* = \frac{[K]}{E D_2} \quad (2.02)$$

mit E als Elastizitätsmodul und dem Laufraddurchmesser D_2 als geometrische Bezugsgröße.

Die dimensionslose Fliehkraftbelastung $[F]^*$ wird aus den Gleichungen A1.38 und A1.44 zu:

$$[F]^* = \frac{[F]}{\rho u^2 D_2} \quad (2.03)$$

mit ρ als Dichte des Laufradwerkstoffes und u als Umfangsgeschwindigkeit am Laufradaustritt.

Hiermit folgt für die Steifigkeitsbeziehung, wenn die dimen-

sionslosen Größen darin eingeführt werden

$$E D_2 [K]^* [a] = \rho u^2 D_2^2 [F]^* , \quad (2.04)$$

so daß sich für die Verformungen $[a]$ die Proportionalität ergibt:

$$[a] \sim \frac{\rho u^2 D_2}{E} \quad (2.05)$$

Zur Umrechnung der Spannungen $[\sigma]$ liefert das verallgemeinerte Hookesche Gesetz bei linear-elastischem Verhalten die Proportionalität:

$$[\sigma] \sim E [\epsilon] \quad (2.06)$$

Da die Dehnungen bereits dimensionslos sind, gilt:

$$[\epsilon] \sim \frac{[a]}{D_2} \quad (2.07)$$

Damit folgt aus Gleichung 2.06 für die Spannungen $[\sigma]$ die Proportionalität:

$$[\sigma] \sim E \frac{[a]}{D_2}$$

bzw. mit Gleichung A2.05:

$$[\sigma] \sim \rho u^2 \quad (2.08)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 2.05 bzw. 2.08 können die fliehkraftbedingten Verformungen und Spannungen in Abhängigkeit von der Dichte ρ , dem Elastizitätsmodul E , der Umfangsgeschwindigkeit u und dem Laufraddurchmesser D_2 umgerechnet werden. Diese Umrechnungen dürfen allerdings nur unter Wahrung geometrischer Ähnlichkeit vorgenommen werden, d.h. es wird eine maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung der Laufradgeometrie vorausgesetzt.

Für eine überschlägige Umrechnung der im folgenden für Aluminiumlaufräder berechneten Werte auf Stahllaufräder gilt näher-

rungsweise bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit und gleichem Laufradaustrittsdurchmesser wegen $E_{St} \approx 3 E_{A1}$ und $\rho_{St} \approx 3 \rho_{A1}$ für die Verformungen $[a]$:

$$[a]_{St} \approx [a]_{A1}$$

und für die Spannungen $[\sigma]$:

$$[\sigma]_{St} \approx 3 [\sigma]_{A1}$$

Bezüglich der temperaturbedingten Spannungen $[\sigma]_T$ läßt sich für eine Änderung der Umfangsgeschwindigkeit u eine analoge Aussage formulieren, wenn gleicher Werkstoff vorausgesetzt wird.

Wenn in erster Näherung davon ausgegangen wird, daß sich die Temperaturverteilung im Laufrad proportional zur totalen Temperaturerhöhung des Fluids in den Strömungskanälen ΔT_t verhält, gilt für die temperaturbedingten Spannungen:

$$[\sigma]_T \sim \Delta T_t$$

Wenn in erster Näherung für die totale Enthalpiedifferenz die Proportion $\Delta h_t \approx u^2$ vorausgesetzt wird, folgt

$$\Delta T_t = \frac{\Delta h_t}{c_p} \sim u^2$$

und damit

$$[\sigma]_T \sim u^2 . \quad (2.09)$$

Da die fliehkraftbedingten Spannungen $[\sigma]_F$ ebenfalls dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit proportional sind (Gleichung 2.08), bleibt das Verhältnis der Spannungen $[\sigma]_F/[\sigma]_T$ näherungsweise konstant.

Bei der Berücksichtigung von Nabenvorspannungen sind keine Verallgemeinerungen zulässig.

3. Experimentelle Erfassung der Laufradoberflächen- temperaturverteilung mittels Infrarotthermografie

Die Berücksichtigung der ungleichförmigen Temperaturverteilung auf den Spannungs- und Dehnungszustand eines Radiallaufrades zusätzlich zu dem Fliehkrafteinfluß bereitet grundsätzlich mit der Methode der finiten Elemente keine Schwierigkeiten, wenn die entsprechenden Terme in den Gleichungen A1.26 und A1.33 bei der Berechnung der Steifigkeitsbeziehung berücksichtigt werden.

Voraussetzung hierzu ist die Kenntnis der ungleichförmigen Temperaturverteilung im Laufrad, die sich durch den Wärmeübergang zwischen der Laufradoberfläche und dem geförderten Fluid in den Strömungskanälen auf der Laufradvorderseite sowie dem Wärmeübergang aufgrund der Radseitenreibung auf der Rückseite ergibt.

Wegen der relativ komplexen Zusammenhänge, die einerseits durch die komplizierte Laufradgeometrie und andererseits durch die nur unvollkommen beschreibbaren thermodynamischen Zustandsverläufe sowohl auf der Laufradvorder- als auch Laufradrückseite vorgegeben sind, ist eine Vorhersage der sich einstellenden Temperaturverteilung nur schwer möglich.

Im Rahmen dieser Arbeit ist deshalb zunächst exemplarisch an einem Radialverdichterlaufrad die Temperaturverteilung im Betrieb mit Hilfe einer Infrarot-Wärmebildkamera gemessen worden, die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellt worden ist. Durch einen entsprechenden Versuchsstandaufbau ist sichergestellt, daß nahezu die gesamte Laufradoberfläche thermografiert werden kann. Die benötigte Temperaturverteilung im Laufradkörper liegt damit ebenfalls fest. Hierzu wird am sinnvollsten mit der Methode der finiten Elemente die Laplacesche Wärmeleitungsgleichung für das Laufrad gelöst, wobei die Meßwerte als Randbedingung auf der Oberfläche vorzugeben sind (Anhang 2).

Das Laufrad ist mit einer ebenen Deckscheibenkontur ausgeführt, um den Einbau eines planparallelen Sichtfensters in den Versuchsstand zu ermöglichen.

Als Werkstoff des fliegend gelagerten Laufrades ist eine Aluminium-Knetlegierung (Al Mg 4,5) gewählt worden.

Der Laufradaustrittsdurchmesser ist auf $D_2 = 340$ mm festgelegt worden. Der Austrittswinkel beträgt $\beta_2 = 55^\circ$.

Mit einer Versuchsdrehzahl von $N = 13200 \text{ min}^{-1}$ und einer somit fixierten Umfangsgeschwindigkeit von $u_2 = 235 \text{ m/s}$ ergeben diese Werte mit der erreichbaren Temperaturerhöhung des Fördermediums von ca. 25 K eine Temperaturverteilung auf der Laufradoberfläche, die genügend große Temperaturdifferenzen besitzt, um mit Hilfe der Infrarot-Wärmebildkamera gut auswertbare Thermogramme erhalten zu können.

Der am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen vorhandene und zur Durchführung des Meßprogramms verwendete Versuchsstand erlaubt aufgrund seiner universellen Konstruktion die Anpassung an verschiedene Erfordernisse /55/.

Bild 3.02 zeigt den Meridianschnitt der Versuchseinrichtung. Das massive Gehäuse bietet Schutz bei Laufradzerstörungen. Die abschraubbare Rückwand des Gehäuses nimmt den auswechselbaren Lagerträger auf, auf welchen die Versuchslaufräder fliegend aufgespannt werden.

Der Antrieb erfolgt durch einen 370 KW Gleichstrommotor über ein zwischengeschaltetes Planetengetriebe, das eine maximale Verdichterdrehzahl von 30000 min^{-1} zuläßt.

Die Anpassung des Versuchsstandes an das durchgeführte Meßprogramm hat die Konstruktion einer Verdichterstufe erfordert,

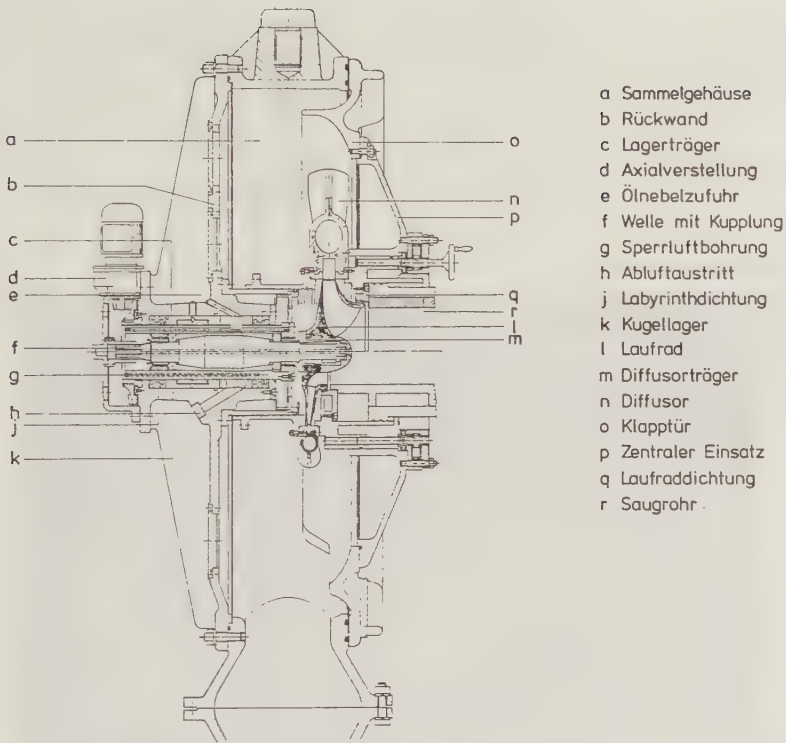
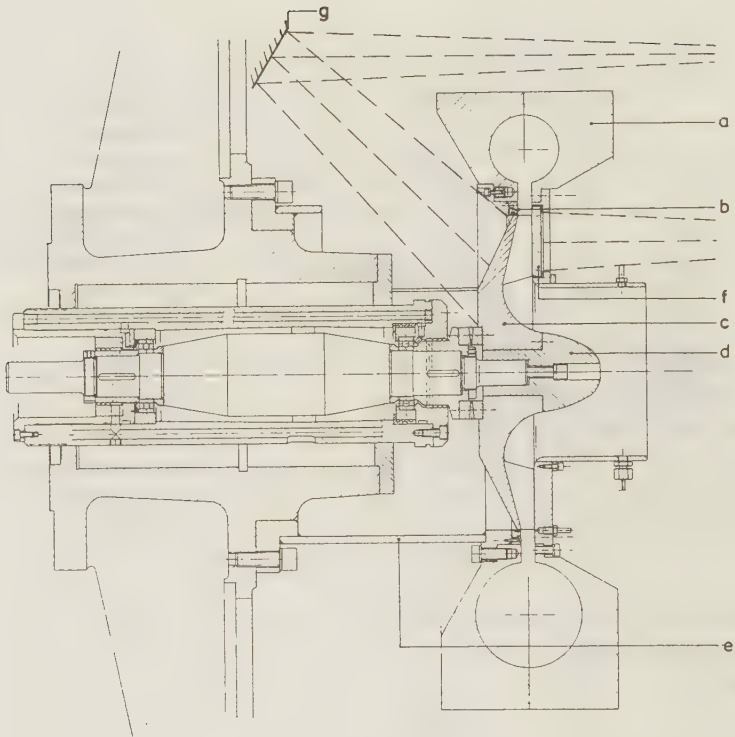


Bild 3.02: Großer Versuchsstand, oberhalb der Mittellinie mit Stufe größerer Schnellläufigkeit, unterhalb mit Stufe kleinerer Schnellläufigkeit dargestellt

welche im wesentlichen aus einer Sammelspirale, einer deckscheibenseitigen Laufradabdeckung mit der Möglichkeit zum Einbau eines Germanium-Sichtfensters und einer Laufradaufspannung besteht. Die Verdichterstufe ist in Bild 3.03 als Konstruktionszeichnung und in Bild 3.04 als Fotografie dargestellt.



- | | | | |
|--------------------|-----------------------|-----------|-----------------|
| a Spirale | b Dichtung | c Laufrad | d Einlaufkappe |
| e Flansch, geteilt | f Germanium - Fenster | | g Umlenkspiegel |

Bild 3.03: Konstruktionszeichnung der Verdichterstufe

Das Laufrad saugt das Fördermedium über einen kurzen Ansaugstutzen aus der Umgebung an, wodurch die Messung der Temperaturverteilung auf der Einlaufkappe sowie in der Umlenkung des Laufrades ermöglicht wird. In die eben ausgeführte Deckscheibenkontur ist plan ein Germanium-Sichtfenster eingelassen. Das Fenster ist als Viertelkreisringsegment ausgeführt, wobei die Dimensionierung in radialer Richtung in etwa der radialen Erstreckung der Beschau felung entspricht. Durch diese Maßnahmen läßt sich nahezu die ge-

samte Laufradvorderseite thermografieren. Um ebenfalls die Rückseite des Laufrades thermografieren zu können, ist die nach hinten offene Sammelspirale nur zur Hälfte am Gehäuserahmen des Versuchsstandes angeflanscht. Die Beobachtung der Laufradrückseite erfolgt über einen am Gehäuserahmen angebrachten Umlenkspiegel von vorne.

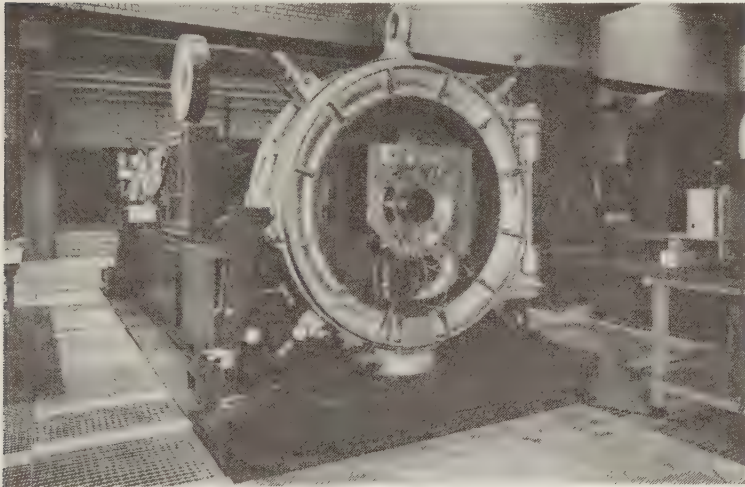


Bild 3.04: Ansicht des Versuchsstandes

Das nach hinten offene Verdichtergehäuse erfordert die Abdichtung des auf Laufradaustrittsdruck verdichteten Fördermediums gegen den Umgebungsdruck unmittelbar am Laufradaustrittsdurchmesser. Um die entstehenden Leckverluste in Grenzen zu halten, sind wegen des relativ großen Umfanges sehr kleine Spalte der Dichtspitzen erforderlich. Hierzu ist eine Spitzendichtung aus Teflon in das Spiralgehäuse eingelassen, welche bei der Montage nur ein geringes Übermaß bezogen auf den Laufradaußendurchmesser besitzt. Durch die radiale Deh-

nung des Laufrades im Betrieb stellt sich ein Spalt minimaler Weite von selbst ein, so daß die Leckverluste vernachlässigbare Werte ergeben.

Durch eine druckseitig eingebaute Drossel können die verschiedenen Betriebspunkte des Laufrades gefahren werden. Die Kennlinie der Verdichterstufe ist in Bild 3.05 dargestellt. Über dem dimensionslosen Eintrittsvolumenstrom

$$\varphi_D = \frac{\dot{V}_E}{\frac{\pi}{4} D_2^2 u_2}$$

sind die Verläufe der totalen Druckzahl

$$\psi_{yt} = \frac{y_t}{u_2^2/2}$$

und des totalen isentropen Wirkungsgrades

$$\eta_{st} = \frac{\Delta h_{st}}{\Delta h}$$

aufgetragen. Die Laufraddrehzahl beträgt $N = 13200 \text{ min}^{-1}$ entsprechend einer Umfangsgeschwindigkeit $u_2 = 235 \text{ m/s}$.

Wegen der endlichen Drosselverluste des druckseitigen Rohrleitungsnetzes ist die Schluckgrenze der Stufe nicht ermittelt worden, so daß der durch die Kurvenverläufe wiedergegebene Maximalvolumenstrom nicht das maximale Fördervolumen der Stufe darstellt. Das Wirkungsgradmaximum entspricht demjenigen Betriebspunkt, bei welchem sich eine nahezu rotationssymmetrische Verteilung der Drücke und der Totaltemperaturen am Laufradumfang einstellt. Da bei diesem Betriebspunkt davon ausgegangen werden kann, daß keine nichtrotationssymmetrischen Rückwirkungen der Spirale auf das Laufrad vorhanden sind und somit auch die Laufradströmung kanalweise rotationssymmetrisch verteilt ist, beziehen sich die im folgenden dargestellten Meßergebnisse auf diesen Betriebspunkt,

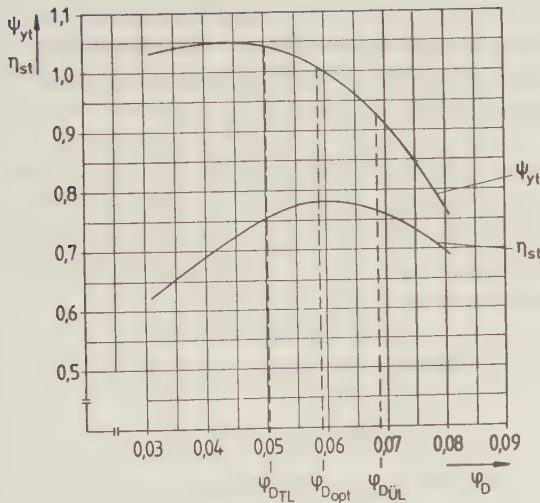


Bild 3.05: Kennlinie der Verdichterstufe

falls keine anderslautenden Vereinbarungen angegeben sind. Darüber hinausgehende Rechen- und Meßergebnisse beziehen sich im Überlastbereich auf den Betriebspunkt $(\varphi_D/\varphi_{D_{opt}})_{ÜL} = 1,2$ und im Teillastbereich auf den Betriebspunkt $(\varphi_D/\varphi_{D_{opt}})_{TL} = 0,85$.

3.2 Grundlagen der Infrarotthermografie

Die Infrarotthermografie, welche bereits vielfältig im Bereich der Hochtemperaturmeßtechnik eingesetzt worden ist, gewinnt in jüngerer Zeit auch im Niedertemperaturbereich durch die Fortschritte bei der Entwicklung ausreichend empfindlicher Sensoren zur quantitativen Temperaturbestimmung zunehmend an Bedeutung. Der steigende Erfolg der infrarotoptischen Temperaturmessung ist trotz des hohen apparativen und damit auch finanziellen Aufwandes durch die Möglichkeit begründet, auf schnellem Wege eine flächenhafte Darstellung der Temperaturverteilung eines Körpers (Thermo-

gramm) zu erhalten. Für den Einsatz dieses Meßverfahrens zur Messung von Oberflächentemperaturen rotierender Lauf-
räder spricht im Rahmen dieser Arbeit insbesondere die
Möglichkeit der berührungsfreien Messung.

Die Messung der Oberflächentemperaturen von Körpern basiert
auf dem physikalischen Gesetz, daß jeder Körper oberhalb
des absoluten Nullpunktes eine Strahlung aussendet, deren
Einordnung in das elektromagnetische Strahlungsspektrum in
Bild 3.06 dargestellt ist.

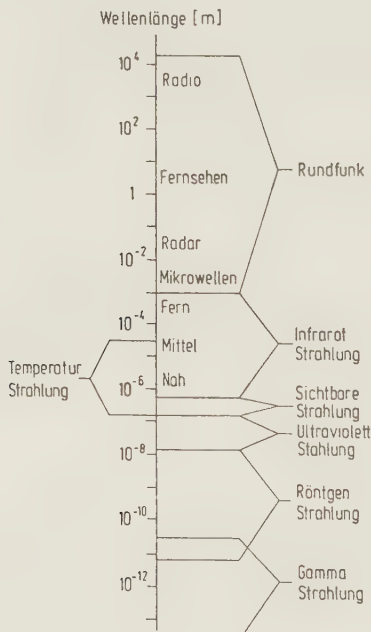


Bild 3.06: Elektromagnetisches Strahlungsspektrum

Der Bereich der Temperaturstrahlung erstreckt sich vom Ultra-
violett über das sichtbare Spektrum bis in den langwelligen
Infrarotbereich. Die Nähe der Temperaturstrahlung zum Bereich
des sichtbaren Lichts macht deutlich, daß die Temperatur-

strahlung den gleichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt, die für das sichtbare Licht gelten. Diese sind bei der quantitativ korrekten Messung der Oberflächentemperaturen zu berücksichtigen, da die Bestimmung der Temperatur auf einer Messung des Strahlungsflusses basiert, welcher auf dem Weg zwischen Meßobjekt und Meßwandler mit Verlusten behaftet ist und zusätzlich durch die Umgebungsstrahlung eine Beeinflussung erfährt.

Soweit die Gesetzmäßigkeiten für die Anwendung der Thermografie zum besseren Verständnis des besprochenen Meßwert-Problems von Bedeutung sind, werden diese im folgenden dargestellt.

Die Größe der von einer Körperoberfläche ausgesandten Strahlung ist neben der Temperatur des Strahlers von dessen Oberflächenbeschaffenheit, dessen chemischer Zusammensetzung und dessen optischer Eigenschaft abhängig. Um die Anzahl dieser Kriterien auf den Temperatureinfluß zu reduzieren, wird von der Definition des schwarzen Strahlers Gebrauch gemacht, welcher als idealer Strahler die Strahlungsenergie ausschließlich aus seiner inneren Energie entsendet. Die spektrale Verteilung der ausgesandten Strahlung des schwarzen Strahlers $E_{\lambda S}$ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ als Funktion der absoluten Temperatur T wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben /36/:

$$E_{\lambda S}(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{K \lambda T}} - 1} \quad (3.01)$$

mit $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js als Plancksches Wirkungsquantum,
 $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/S als Lichtgeschwindigkeit,
 $K = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ J/K als Boltzmann-Konstante.

Gleichung 3.01 ist in Bild 3.07 in Abhängigkeit von λ mit verschiedenen Temperaturen T als Parameter dargestellt.

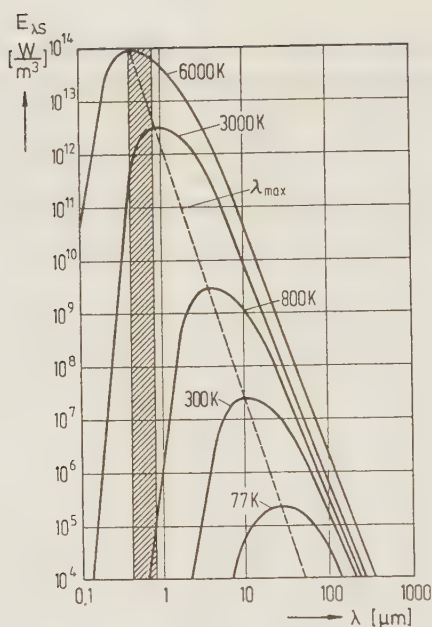


Bild 3.07: Spektrale Intensitätsverteilung des schwarzen Strahlers $E_{\lambda S}$ als Funktion der Wellenlänge λ mit der Temperatur T als Parameter,
 sichtbares Licht

Bild 3.07 zeigt, daß sich die Maxima der Intensitätsverteilungen mit steigender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen hin verschieben und gleichzeitig vergrößern. Insbesondere ist für die Temperaturmessung im Niedertemperaturbereich (ca. 300 K) der erhebliche Unterschied der Maximalintensitäten von nahezu 7 Zehnerpotenzen zwischen der Strahlung des sichtbaren Lichts und der Strahlung bei 300 K zu beachten, der durch die logarithmische Skalierung in Bild 3.07 nur unvollkommen verdeutlicht wird. Sollen also im Niedertemperaturbereich Messungen durchgeführt werden, so ergeben sich aufgrund der zu messenden sehr kleinen Energiemengen große Anforderungen an die Empfindlichkeit des Sensors und des Meßaufbaues.

Die gesamte Ausstrahlung eines schwarzen Körpers E_S in Abhängigkeit der Oberflächentemperatur T wird durch das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz beschrieben. Dieses folgt aus dem Planckschen Gesetz, indem Gleichung 3.01 über alle Wellenlängen von Null bis Unendlich integriert wird /36/:

$$E_S = \frac{2\pi^5}{15c^2} \frac{K^4}{h^3} T^4 = C_S T^4 \quad (3.02)$$

mit

$$C_S = 5,6703 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Gleichung 3.02 bietet die Grundlage, um aus der gemessenen Strahlung einer Körperoberfläche dessen Temperatur bestimmen zu können. Da allerdings die bisherigen Betrachtungen für einen idealisierten schwarzen Strahler getroffen worden sind, wird zur Erfassung der Strahlung eines realen Körpers die von diesem emittierte Strahlung E auf die Strahlung eines schwarzen Körpers E_S bezogen durch:

$$\epsilon = \frac{E}{E_S} \quad (3.03)$$

In Gleichung 3.03 ist ϵ die Emissionszahl der Körperoberfläche. Damit folgt für die tatsächlich von einem realen Körper emittierte Strahlung:

$$E = \epsilon C_S T^4 \quad (3.04)$$

3.3 Systematischer Meßfehler durch Hintergrundstrahlung

3.3.1 Einfluß der Emissionszahl

Wie aus Gleichung 3.04 zu entnehmen ist, übt die Emissionszahl ϵ einen unmittelbaren Einfluß auf die gemessene Temperatur aus, so daß deren Einfluß auf das Meßergebnis unbedingt zu berücksichtigen ist. Es reicht allerdings nicht aus, lediglich eine

Korrektur der erhaltenen Meßwerte mit Hilfe der Gleichung 3.04 und den in Bild 3.08 dargestellten ϵ -Zahlen vorzunehmen, da zusätzlich zu der verringerten Emission des realen Strahlers mit $\epsilon < 1$ die reflektierte Umgebungsstrahlung berücksichtigt werden muß. Diese kann bereits bei ϵ -Zahlen, deren Werte nur geringfügig kleiner als 1 sind, einen erheblichen Fehler auf das Meßergebnis ausüben.

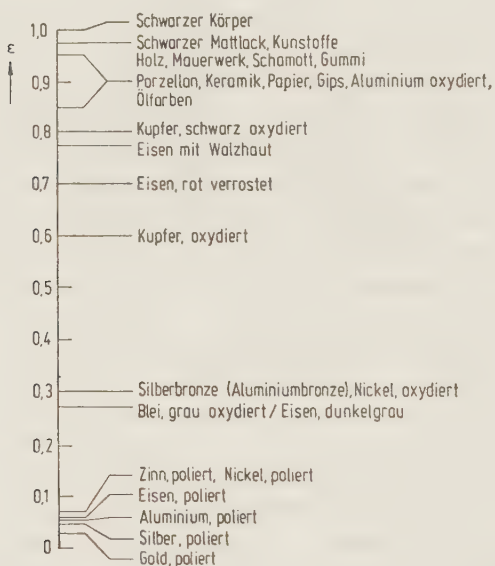


Bild 3.08: Emissionszahl ϵ einiger Stoffe bei 20°C

Zur Erläuterung dieser Zusammenhänge werden zunächst die Kenntnis der Wechselwirkung von Strahlung mit Materie sowie das Kirchhoffsche Gesetz benötigt, welches die Abhängigkeit zwischen der Emissionszahl ϵ und der Absorptionszahl α einer Körperoberfläche beschreibt.

Trifft auf einen Körper eine Strahlung mit dem Energiestrom E (Bild 3.09), so wird von dieser Strahlung

- der Anteil ρE reflektiert,
- der Anteil τE durchgelassen
- und der Anteil αE absorbiert.

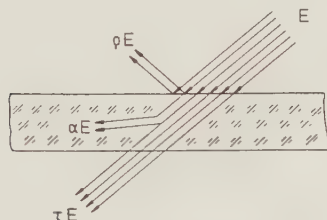


Bild 3.09: Zur Wechselwirkung von Strahlung beim Durchgang durch einen transparenten Körper

Da die Summe der umgewandelten Energieanteile gleich dem eintreffenden Energiestrom sein muß, gilt:

$$E = \rho E + \tau E + \alpha E \quad (3.05)$$

bzw.:

$$1 = \rho + \tau + \alpha \quad (3.06)$$

Für die hier zu betrachtenden Zusammenhänge kann Strahlungsundurchlässigkeit ($\tau = 0$) vorausgesetzt werden, so daß gilt:

$$1 = \rho + \alpha \quad (3.07)$$

Das Kirchhoffsche Gesetz sagt aus, daß für beliebige Körper im thermodynamischen Gleichgewicht die Emissionszahl ϵ zahlenmäßig gleich der Absorptionszahl α ist /29/:

$$\epsilon = \alpha \quad (3.08)$$

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge, welche den Einfluß der Umgebungsstrahlung auf das Meßergebnis beschreiben, ist in

Bild 3.10 ein Meßobjekt mit der Körpertemperatur T_K im Inneren eines Raumes dargestellt, dessen Wände an jeder Stelle die gleiche Umgebungstemperatur T_U besitzen sollen.

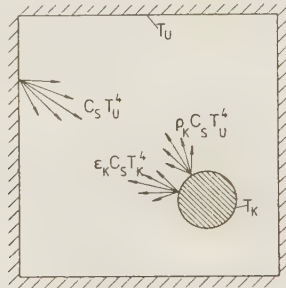


Bild 3.10: Meßobjekt der Temperatur T_K im Inneren eines Hohlraumes mit der Umgebungstemperatur T_U

Die strahlende Oberfläche des Meßobjektes wird als sehr viel kleiner als die Raumabmessungen vorausgesetzt, so daß ohne großen Fehler die an den Raumwänden reflektierte Strahlung, welche von der Objektoberfläche ausgeht, vernachlässigt werden kann. Damit kann der Hohlraum als idealer Strahler vorausgesetzt werden. Dieser emittiert an jeder Stelle der Wand die Umgebungsstrahlung E_U :

$$E_U = C_S T_U^4 \quad (3.09)$$

Die von der Meßkörperoberfläche ausgehende Strahlung E_K , welche von der Infrarotkamera als Meßsignal empfangen wird, setzt sich aus der reflektierten Umgebungsstrahlung $\rho_K E_U$ und der Emission der Körperoberfläche $\epsilon_K C_S T_K^4$ zusammen:

$$E_K = \rho_K E_U + \epsilon_K C_S T_K^4 \quad (3.10)$$

Mit den Gleichungen 3.07 und 3.08 folgt für die Reflexionszahl der Körperoberfläche:

$$\rho_K = 1 - \alpha_K = 1 - \epsilon_K$$

Damit ergibt sich die Strahlung E_K zu:

$$E_K = \epsilon_K C_S T_K^4 + (1 - \epsilon_K) C_S T_U^4 \quad (3.11)$$

Diese Strahlung erzeugt als Meßwertanzeige die scheinbare Temperatur T_S , wobei vorausgesetzt ist, daß das Meßgerät mit einem schwarzen Strahler auf $\epsilon_K = 1$ geeicht worden ist:

$$E_K = C_S T_S^4 \quad (3.12)$$

Mit Gleichung 3.11 ergibt sich damit für die tatsächlich vorhandene Temperatur der Körperoberfläche T_K als Funktion der Umgebungstemperatur T_U und der scheinbaren, als Meßwert erhaltenen Temperatur T_S die Gleichung:

$$T_K = \left(\frac{1}{\epsilon_K} (T_S^4 - (1 - \epsilon_K) T_U^4) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.13)$$

Die graphische Darstellung dieser Gleichung zeigt Bild 3.11, in dem der Meßfehler als Differenz aus der scheinbaren, angezeigten Temperatur T_S und der Körpertemperatur T_K für verschiedene Emissionszahlen ϵ_K dargestellt ist. Die Kurven sind für die zwei verschiedenen, angenommenen Umgebungstemperaturen $T_U = 20^\circ\text{C}$ und $T_U = 80^\circ\text{C}$ eingezeichnet.

Aus den dargestellten Kurvenverläufen läßt sich unmittelbar ablesen, daß die gemessene Temperatur T_S um so weniger von der wahren Körpertemperatur T_K abweicht, je näher die Körpertemperatur an der Umgebungstemperatur T_U liegt. Bei identischen Temperaturen wird die Anzeige unabhängig von der Emissionszahl der Körperoberfläche.

Darüber hinaus verdeutlichen die Kurven den erheblichen Einfluß der Umgebungsstrahlung, der selbst bei Emissionszahlen $\epsilon_K > 0,9$ berücksichtigt werden muß, wenn genaue Messungen erforderlich sind. Aus Bild 3.11 ist auch abzulesen, daß sich bei einer Körpertemperatur $T_K = 60^\circ\text{C}$ und einer Umgebungs-

temperatur $T_U = 20^\circ\text{C}$ eine Minderanzeige von $3,4^\circ\text{C}$ ergibt, falls die Emissionszahl $\epsilon_K = 0,9$ beträgt. Selbst bei der relativ hohen Emissionszahl $\epsilon_K = 0,98$ beträgt der absolute Fehler noch $0,7^\circ\text{C}$.

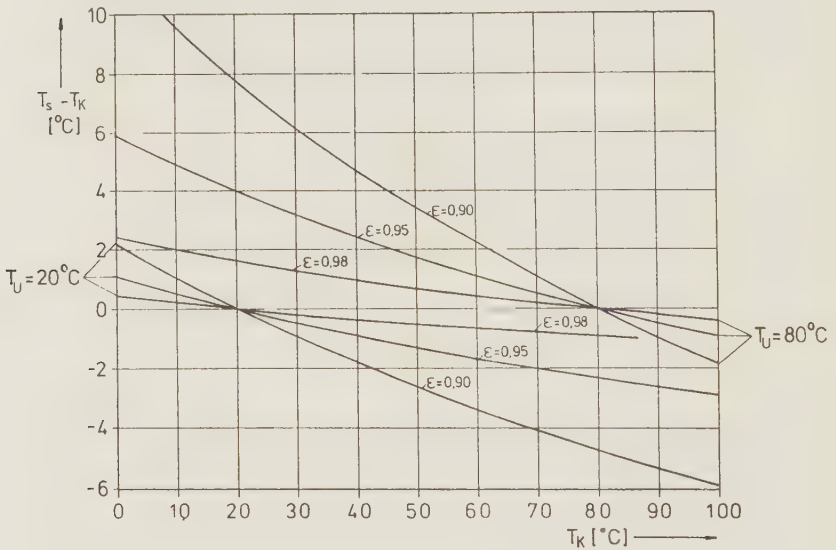


Bild 3.11: Meßfehler $T_s - T_K$ in Abhängigkeit der Körpertemperatur T_K für verschiedene Emissionszahlen ϵ_K und Umgebungstemperaturen T_U

Aufgrund der dargestellten Zusammenhänge haben sich für die Messung der Laufradtemperaturen die folgenden Konsequenzen ergeben:

Die Oberfläche des aus Aluminium gefertigten Laufrades, deren Emissionszahl nach der Bearbeitung $\epsilon < 0,2$ betragen hat, ist mit Hilfe eines speziellen Mattlackes auf eine Emission von $\epsilon = 0,97$ eingestellt worden. Vorab ist die Laufradoberfläche zusätzlich gesandstrahlt worden und auf eine Rauhtie-

fe von ca. 10 μm gebracht worden. Durch diese Maßnahme ergibt sich neben einer guten Haftung des Lackes eine zusätzliche Erhöhung der Emission, da ein gewisser Anteil der emittierten Strahlung mehrfach an der nunmehr rauhen Oberfläche reflektiert wird und sich durch die Mehrfachreflexionen somit den Bedingungen der Hohlraumstrahlung annähert.

Darüber hinaus wird durch die rauhe Oberfläche eine gute Annäherung an die Verhältnisse eines sogenannten Lambertischen Strahlers erzielt /31/. Für einen Lambertischen Strahler gilt, daß die emittierte Strahldichte unabhängig von dem Winkel zwischen Strahlungsrichtung und Normalenrichtung der Oberfläche ist. Diese Verhältnisse sind mit Hilfe eines Versuches gut nachgewiesen worden, indem das ausgebaute und gleichmäßig auf eine bestimmte Temperatur erwärmte Laufrad thermografiert worden ist. Auf dem Thermogramm sind die Konturen des Laufrades, insbesondere die der Schaufeln, nicht erkennbar gewesen, obwohl die von der Laufradoberfläche ausgehenden Strahlen unterschiedlich stark von der Normalenrichtung abweichen.

3.3.2 Kompensation des systematischen Meßfehlers

Der Hersteller der verwendeten Infrarotkamera (Typ UTJ 900), deren Funktionsprinzip in Abschnitt 3.4 näher beschrieben ist, gibt im Niedertemperaturbereich (0°C bis 100°C) als typische Meßgenauigkeit $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$ an. Die Einhaltung dieser Genauigkeit ist allerdings während der Versuche und den Vorbereitungsarbeiten nur durch ständige Kontrolle und wiederholtes Nacheichen der Kameraelektronik insofern sichergestellt worden, als mit Hilfe zweier präziser Referenzstrahler, deren Temperatur im entsprechenden Bereich exakt einstellbar ist, Eichmessungen durchgeführt worden sind.

Um die kameraseitig vorgegebene Meßgenauigkeit auch mit guter Sicherheit auf die Meßergebnisse im Versuch übertragen zu können, ist dem Einfluß der Störstrahlung besondere Auf-

merksamkeit zu widmen. Der Störstrahlungseinfluß geht über die durch Gleichung 3.13 berücksichtigte Umgebungsstrahlung hinaus und ermöglicht keine einfache Korrektur der Meßwerte mit Hilfe dieser Gleichung, obwohl die grundsätzlichen Zusammenhänge durch diese Gleichung richtig wiedergegeben werden.

Bild 3.12 zeigt den prinzipiellen Meßaufbau. Es sind der Umlenkspiegel zur Beobachtung der Laufradrückseite, das Germanium-Fenster, das Verdichtergehäuse und die Umgebung angedeutet. Dabei sind drei verschiedene Thermografiesituationen, welche alle aufgrund unterschiedlicher Störstrahlungseinflüsse eine verschiedene Skalencharakteristik aufweisen, zu unterscheiden, nämlich:

- a) Messung des Laufradeinlaufs,
- b) Messung des Laufradkanals durch ein Germanium-Fenster,
- c) Messung der Laufradrückseite über einen Umlenkspiegel.

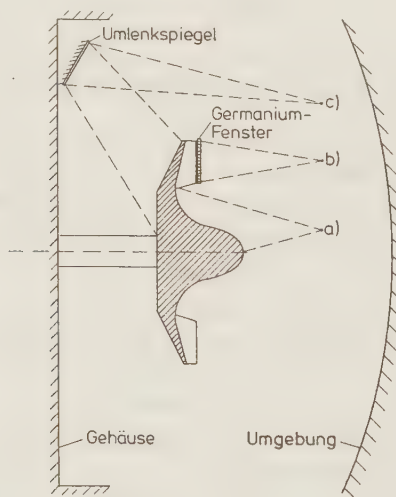


Bild 3.12: Zur Berücksichtigung der Störstrahlung bei verschiedenen Aufnahmepositionen a), b) und c)

Die folgenden Parameter üben je nach Aufnahmeposition einen verfälschenden Einfluß auf den Meßwert aus:

- Abweichung der Emissionszahl der Laufradoberfläche vom Wert $\epsilon = 1$
- Störstrahlung der Umgebung
- Störstrahlung des im Betrieb erwärmten Verdichtergehäuses
- Transmissionsverluste des Germanium-Fensters
- Eigenstrahlung des Germanium-Fensters in Abhängigkeit von dessen Temperatur
- Reflexionsverluste des Umlenkspiegels
- Streuung und Absorption im Übertragungsmedium.

Da es praktisch unmöglich ist, für jede der genannten Einflußgrößen mit Hilfe von Eichmessungen deren jeweilige Skalencharakteristik zu bestimmen, wobei alle restlichen Parameter konstant zu halten sind, und diese Einflüsse durch entsprechende Korrekturfaktoren zu berücksichtigen, ist die folgende Vorgehensweise gewählt worden.

Zunächst ist der Versuchsstand über längere Zeit gefahren worden, bis das Gehäuse, die Stufenbauteile und das Germanium-Fenster auf diejenigen Temperaturen erwärmt waren, die den stationären Betriebsbedingungen entsprechen. Nach dem Stillsetzen des Laufrades bleibt die Temperatur des Versuchsstandgehäuses sowie der Stufenbauteile aufgrund ihrer hohen Wärmespeicherfähigkeit über einen längeren Zeitraum annähernd konstant, so daß hierfür betriebsähnliche Bedingungen vorausgesetzt werden können. Das zwischenzeitlich abgekühlte Laufrad ist anschließend mittels eines regelbaren Heißluftgebläses auf verschiedene Temperaturen erwärmt worden, um mit Hilfe von genauen Oberflächenfühlern für verschiedene Laufradtemperaturen Referenzmessungen durchzuführen. Die Messungen, welche den Unterschied zwischen den tatsächlichen, mit den Oberflächenfühlern gemessenen Temperaturen und der Kameraanzeige festlegen sollten,

sind für jede der in Bild 3.12 dargestellten Aufnahmepositionen separat durchgeführt worden, um zu jeder eine entsprechende Eichkurve zu erhalten. Für die Eichkurve der Meßposition b) ist der zusätzliche Temperatureinfluß des Germaniumfensters berücksichtigt worden, indem dieses durch ein zweites Heißluftgebläse auf solche Temperaturen erwärmt wurde, die denen im Betrieb entsprechen.

Einen Anhalt über den Einfluß der Störstrahlung auf die Meßanzeige für die drei verschiedenen Aufnahmepositionen vermittelt Tabelle 3.01, in der die infrarotoptisch gemessene, scheinbare Temperatur T_s der tatsächlichen Oberflächentemperatur des Laufrades T_K für drei verschiedene Werte T_K gegenübergestellt ist. Die unterschiedlichen Aufnahmepositionen sind ebenfalls berücksichtigt.

	$T_s \quad [^{\circ}\text{C}]$		
$T_K \quad [^{\circ}\text{C}]$	a)	b)	c)
30	29,7	28,6	30,2
40	39,2	37,3	39,4
50	48,8	45,7	49,2

Tabelle 3.01: Meßwertverfälschung bei verschiedenen Aufnahmepositionen gemäß Bild 3.12
 T_s = scheinbare, angezeigte Temperatur
 T_K = tatsächliche Körpertemperatur

Wie der Tabelle zu entnehmen ist, sind die Abweichungen für die Meßposition b) (Messung durch Germanium-Fenster) am größten. Sie betragen bei einer Laufradtemperatur $T_K = 50^{\circ}\text{C}$ bereits 4,3 K und können somit nicht vernachlässigt werden. Bemerkenswert ist der geringere Meßfehler der Meßposition c) (Messung über Umlenkspiegel) im Vergleich zur Meßposition a)

(unmittelbare Messung des Laufradeinlaufes), der besonders für das 50°C warme Laufrad deutlich wird. Diese Tatsache ist auf den verschieden starken Einfluß der Umgebungsstrahlung ($T_{\text{Umgebung}} = 22^{\circ}\text{C}$) und der Gehäusestrahlung ($T_{\text{Gehäuse}} = 34^{\circ}\text{C}$) zurückzuführen, welcher je nach Meßposition unterschiedlich auf die Meßabweichung einwirkt (Bei Meßposition a) vornehmlich Umgebungsstrahlung; bei Meßposition b) vornehmlich Gehäusestrahlung). Wegen des gleichen Effektes der Gehäusestrahlung ergibt sich für das 30°C warme Laufrad in Meßposition c) eine zu groß gemessene Temperatur.

Mit den in Tabelle 3.01 auszugsweise dargestellten Eichwerten liegen die erforderlichen Angaben vor, um die Temperaturen auf der gesamten Laufradoberfläche quantitativ genau thermografieren zu können.

3.4 Infrarotthermografie im rotierenden Radiallaufrad

3.4.1 Verwendete Infrarotkamera

Um praxisgerechte Aussagen treffen zu können, müssen die Messungen der Laufradtemperaturen während des Betriebes erfolgen.

Die hierzu eingesetzte Infrarotwärmebildkamera UTJ 900 ist in Bild 3.13 gezeigt.

Diese Kamera zeichnet sich sowohl durch ihr hohes geometrisches Auflösungsvermögen wie auch durch die Fähigkeit aus, selbst niedrige Temperaturen im Bereich von 0°C mit einer Genauigkeit von 0,2 K messen zu können. Die geometrische Auflösung beträgt ca. 625 x 625 Bildpunkte, was bei formatfüllender Aufnahme des für die Versuche vorgesehenen Laufrades einem Meßfleckdurchmesser von ca. 0,5 mm entspricht.

Der thermografische Gegenstand wird in Form eines Videobildes auf einem Monitor dargestellt, wobei ein linearer Zusammenhang zwischen den Graustufen des dargestellten Bildes

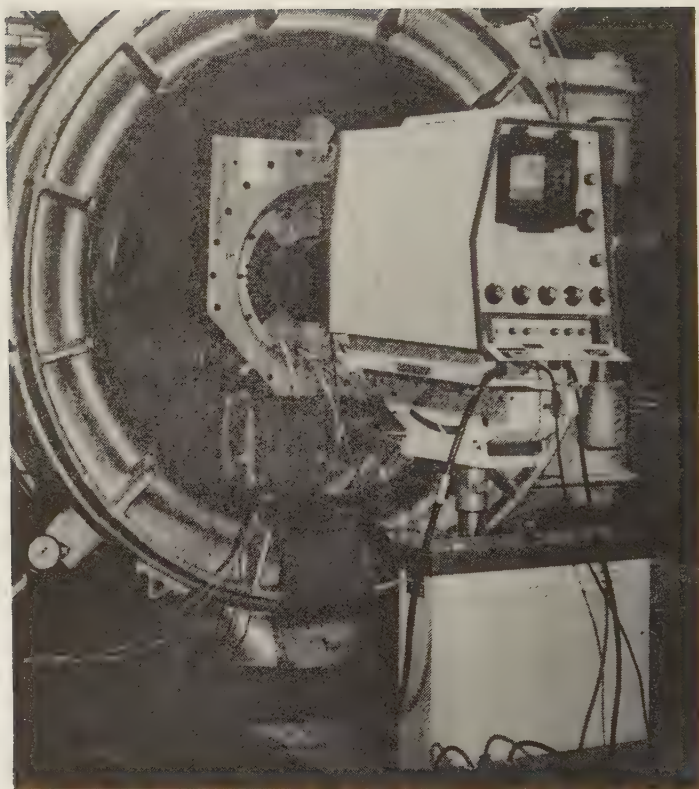


Bild 3.13: Verwendete Infrarotwärmebildkamera Typ UTJ 900

und der entsprechenden Oberflächentemperatur des aufgenommenen Gegenstandes besteht. Ferner lassen sich Isothermen sowie die Temperaturverteilung entlang einer verschiebbaren horizontalen Linie darstellen. Ein Videobandgerät erlaubt die Abspeicherung der aufgenommenen Thermogramme, so daß die Auswertung zu einem späteren Zeitpunkt möglich ist.

In Bild 3.14 sind ein Thermogramm sowie eine Tageslichtfotografie von zwei der verwendeten Referenzstrahler dargestellt. Ein Referenzstrahler besteht aus einem ca. 20 cm hohen zylind-

drischen Gefäß, in welchem Wasser mit Hilfe einer Regeleinrichtung auf konstante Temperatur erwärmt wird. Ein Rührwerk stellt eine homogene Temperaturverteilung der Wasserfüllung sicher. In das zylindrische Gefäß ist ein innenwändig geschwärzter Hohlkörper eingelassen, welcher in guter Näherung den Bedingungen eines idealen schwarzen Strahlers entspricht und als Referenzstrahler dient.

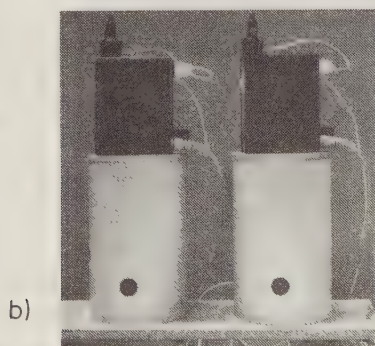
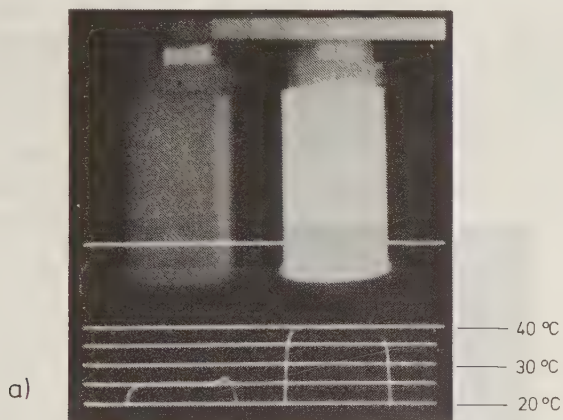


Bild 3.14: Thermogramm a) und Tageslichtaufnahme b) von zwei schwarzen Strahlern

Die Temperatur der schwarzen Strahler in Bild 3.14 a) beträgt 25°C (links) und 40°C (rechts). Im unteren Teil des Bildes ist die Temperaturverteilung entlang der im Thermobild eingeblendeten Linie als Diagramm zu erkennen.

Der Abstand der Linien entspricht einem Temperaturunterschied von 5 K. Aus dem Bild ist gut der Einfluß der Störstrahlung zu erkennen. Auf dem rechten Bild des 25°C warmen Strahlers wird eine um ca. $1,5^{\circ}\text{C}$ zu große Temperatur angezeigt, die der reflektierten Strahlung des 40°C warmen Gefäßes zuzuschreiben ist.

Bild 3.15 zeigt bei gleichen Verhältnissen das Thermogramm des 25°C warmen schwarzen Strahlers bei nunmehr vergrößerter Auflösung der Kamera. In diesem Bild entspricht der Abstand der Linien einer Temperaturdifferenz von 1 K.

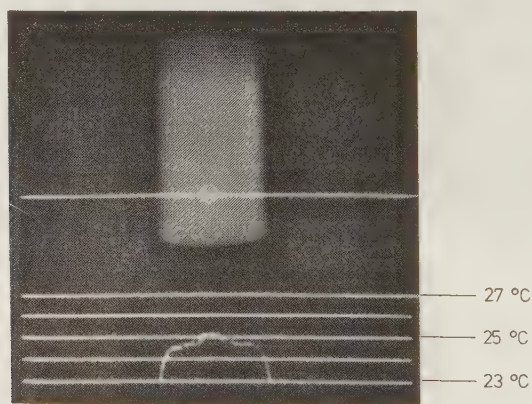


Bild 3.15: Thermogramm eines schwarzen Strahlers bei vergrößerter Auflösung

In dem Bild ist aufgrund der vergrößerten Auflösung im Gegensatz zu Bild 3.14 der scheinbare Temperaturunterschied zwischen Hohlraum und Gefäßwand zu erkennen, der auf die unterschiedlichen Emissionszahlen des Hohlraumes (nahezu $\epsilon=1$)

und der lackierten Gefäßwand ($\epsilon \approx 0,92$) zurückzuführen ist. Darüber hinaus verdeutlicht das Bild das Lambertsche Strahlungsgesetz, nach welchem die emittierte Strahlung unabhängig von dem Winkel zwischen Normalenrichtung und Beobachtungsrichtung ist (Abschnitt 3.3.1). Die eben abgebildete, zylinderförmige Gefäßwand erscheint auf dem Thermobild mit Ausnahme des äußeren Randes gleichmäßig hell, was durch den konstanten Temperaturverlauf im Diagramm bestätigt wird.

3.4.2 Funktionsprinzip der Infrarotkamera

Das relativ hohe geometrische und thermische Auflösungsvermögen der verwendeten Infrarotkamera wird im Gegensatz zu anderen auf dem Markt angebotenen Kameramodellen dadurch erreicht, daß als Meßwandler nicht eine infrarotempfindliche Vidikon-Röhre, sondern ein einzelner mit flüssigem Stickstoff gekühlter Sensor verwendet wird.

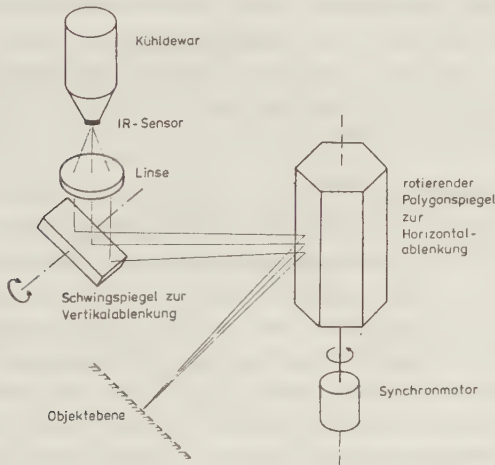


Bild 3.16: Spiegelanordnung in der Infrarotkamera zur Bildzerlegung

Um mit Hilfe eines einzelnen Detektors eine flächenhafte Darstellung des Beobachtungsbereiches zu realisieren, wird mit Hilfe von Dreh- und Schwingspiegeln eine Bildzerlegung durchgeführt und das vom Sensor empfangene Signal seriell weiterverarbeitet. Bild 3.16 zeigt das Funktionsprinzip des optischen Teils der Kamera.

Der geometrische Bildaufbau erfolgt durch zeilenweises Abtasten der Meßfläche, indem ein rotierender Polygonspiegel den auf den Sensor auftreffenden Meßstrahl in horizontaler Richtung mit der Zeilenfrequenz f_K ablenkt. Die Zeilenfrequenz wird durch die Drehzahl des Spiegels und dessen Flächenzahl festgelegt. Von dem Polygonspiegel wird die Strahlung auf einen Schwingspiegel reflektiert, der diese vertikal ablenkt. Die Wiederholfrequenz des abgetasteten Bildes wird durch die Schwingfrequenz des Vertikalspiegels festgelegt.

Bedingt durch die begrenzten Drehzahlen des Polygonspiegels benötigt die Kamera für einen vollständigen Bildaufbau einen Zeitraum von ca. 2 Sekunden. Diese Tatsache wirkt sich allerdings für den hier in Frage kommenden Einsatzzweck nicht nachteilig aus, da über diesem erforderlichen Zeitraum ein stationärer Betriebszustand des Laufrades auf dem Versuchstand vorausgesetzt werden kann.

Die vom Schwingspiegel reflektierte Strahlung gelangt mit Hilfe einer Linse, die zur Fokussierung auf verschiedene Aufnahmeabstände axial verschoben werden kann, auf den Sensor. Dieser wandelt die empfangene Strahlung in elektrische Signale um, die auf elektronischem Wege weiterverarbeitet werden. Die nachgeschaltete Auswertelektronik beinhaltet neben einer aufwendigen Kompensationsschaltung, welche die innerhalb des Kameragehäuses entstehende und mitgemessene Störstrahlung eliminiert, ein Linearisierungsnetzwerk, das den durch Gleichung 3.12 beschriebenen nichtlinearen Zusammenhang zwischen der Strahlung und der Temperatur berücksichtigt.

Die lange Bildaufbauzeit von ca. 2 Sekunden erfordert die Zwischenspeicherung des Bildes in einer Speicherröhre. In diese wird das langsam abgetastete Bild eingeschrieben und anschließend mit Bildwiederholfrequenzen größer als 25 Hz ausgelesen, um auf einem Sichtschirm ein flimmerfreies und mit dem Auge beobachtbares Standbild zu erzeugen.

3.4.3 Messung im rotierenden Laufrad

Um mit der Kamera Aufnahmen in einem rotierenden System durchführen zu können, ist zur Erzeugung eines stillstehenden Bildes zunächst die Zwischenschaltung eines Drehprismas nach Dove zwischen Kamera und rotierendem Laufrad erprobt worden. Das Funktionsprinzip eines solchen Prismas verdeutlicht Bild 3.17 /9/.

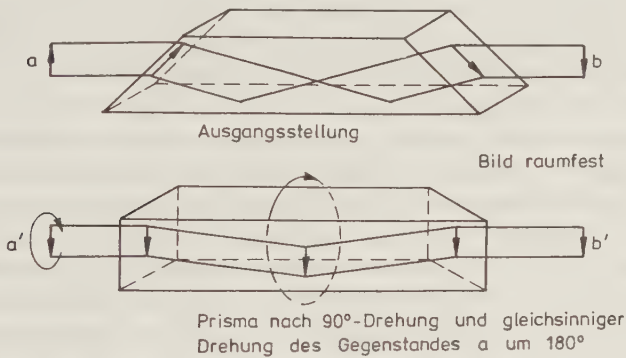


Bild 3.17: Funktionsprinzip eines Dove-Prismas

Unter der Bedingung, daß das Prisma mit genau der halben Drehzahl rotiert wie der zu betrachtende Gegenstand a), behält das Bild b) seine Position raumfest bei.

Bedingt durch die Tatsache, daß in der verwendeten Kamera die Spiegel für die Horizontal- und Vertikalablenkung in Strahlrichtung einen bestimmten Abstand voneinander aufweisen

(Bild 3.16), ist der Strahlengang außerhalb der Kamera mit einer Parallaxe bezüglich der beiden Koordinatenrichtungen behaftet. Diese erfordert für eine Vorsatzoptik vor der Kamera einen effektiv nutzbaren Durchmesser von ca. 70 mm. Da die geometrischen Abmessungen des Prismas aus optischen und festigkeitsgerechten Gründen auf Kantenlängen von ca. 35 mm beschränkt sind, weil sich sonst unter dem Fliehkrafteinfluß des rotierenden Prismas die plan geschliffenen Flächen zu stark deformieren würden, ergibt sich durch die Parallaxe des Strahlenganges eine erhebliche Beschränkung des Blickwinkels. Somit kann das Laufrad nur aus größeren Beobachtungsabständen thermografiert werden, womit sich das geometrische Auflösungsvermögen erheblich reduziert.

Eine andere Vorgehensweise, die einen stroboskopischen Effekt ausnutzt, beruht auf der Tatsache, daß der Bildaufbau in der Kamera durch zeilenweise Abtastung der Meßfläche erfolgt. Wird nun das Bild so ausgetastet, daß jeweils bei einer Umdrehung des Laufrades nur eine Zeile geschrieben wird und zwar immer genau dann, wenn sich das Laufrad in einer bestimmten Stellung befindet, so kann ein vollständiges Wärmebild des rotierenden Laufrades aufgezeichnet werden, ohne daß irgendwelche weiteren optischen Komponenten in den Strahlengang eingebaut zu werden brauchen. Insbesondere kann die Position der Kamera bezogen auf das Laufrad frei gewählt werden. Diese Möglichkeit ist beim Einsatz des Dove-Prismas nicht gegeben, da aus optischen Gründen die Drehachse des Prismas mit der Drehachse des Laufrades übereinstimmen muß und somit die Kameraposition einschließlich ihrer Beobachtungsrichtung festliegt.

Die freie Positionierung der Kamera kann darüber hinaus dazu ausgenutzt werden, mit Hilfe eines Umlenkspiegels die Rückseite des Laufrades zu thermografieren.

Hinsichtlich der Versuchsdrehzahl sind bei der Anwendung des

stroboskopischen Effektes gewisse Einschränkungen zu beachten. Da für eine exakte Synchronisation die Zeilenfrequenz der Kamera mit der Drehzahl des Meßobjektes übereinstimmen muß, kann nur bei einer bestimmten Drehzahl thermografiert werden. Eine Änderung der Spiegeldrehzahl der Kamera ist zwar grundsätzlich möglich, erfordert jedoch ein vollständig neues Justieren der gesamten Kameraelektronik, da sämtliche zum Bildaufbau benötigten Synchronisationsimpulse kameraintern von der Spiegelfrequenz abhängig sind.

Allerdings kann bei der Anwendung dieses Meßprinzips auf rotierende Laufräder die dargelegte Einschränkung abgeschwächt werden. Aufgrund der periodisch rotationssymmetrischen Bauweise eines Radiallaufrades und der als Folge davon ebenfalls periodisch rotationssymmetrischen Temperaturverteilung stellt sich der stroboskopische Effekt auch dann ein, wenn sich ein beliebiger Laufradkanal immer in der gleichen Stellung befindet, wenn eine Bildzeile geschrieben wird.

Hierdurch lassen sich bei den nachstehend abgeleiteten Laufraddrehzahlen Messungen durchführen, ohne daß die Spiegeldrehzahl der Kamera verändert werden muß. Die synchronisierbaren Drehzahlen sind diskret verteilt und berechnen sich wie folgt:

Die Frequenz f_L , mit der jeweils ein Strömungskanal an der gleichen Stelle erscheint, berechnet sich für ein Laufrad mit z Schaufeln und der Laufraddrehzahl N zu:

$$f_L = z N$$

Ein stroboskopischer Effekt tritt genau dann ein, wenn die Frequenz f_L ein beliebiges, ganzzahliges Vielfaches n der Zeilenfrequenz f_K der Kamera beträgt:

$$f_L = n f_K$$

Für die synchronisierbaren Laufraddrehzahlen N gilt damit:

$$N = f_K \frac{n}{z} \quad (3.14)$$

Die für die Versuche im Rahmen dieser Arbeit verwendete Infrarotkamera besitzt eine Zeilenfrequenz von $f_K = 300 \text{ Hz}$. Das Laufrad ist mit $z = 15$ Schaufeln ausgeführt, woraus sich nach Gleichung 3.14 mit $n = 1$ als Differenz für zwei aufeinanderfolgende synchronisierbare Laufraddrehzahlen der Wert $\Delta N = 1200 \text{ min}^{-1}$ ergibt. Bei Verdichtern, deren Drehzahl deutlich größer als 1200 min^{-1} ist, können also mehrere Betriebsdrehzahlen in genügend kleinem Abstand voneinander gefahren werden. Die Einschränkung auf diskret verteilte Verdichterdrehzahlen bedeutet also keine gravierende Beschränkung des geschilderten Meßprinzips.

Um mit der dargestellten Vorgehensweise einwandfreie und unverzerrte Bilder zu erhalten, ist es erforderlich, die Kamera während des Bildaufbaues sehr genau und insbesondere äußerst phasenstarr mit dem Versuchsstand zu synchronisieren. Selbst geringste Phasenfehler während dieses Zeitraumes liefern unbrauchbare Bilder, da die einzelnen aufgezeichneten Bildzeilen nicht mehr in einem exakt gleichen Verhältnis zur Laufradstellung stehen.

Die Synchronisation läßt sich bei dem hier verwendeten Kameramodell am einfachsten realisieren, indem der Synchronmotor, der den Polygonspiegel zur Vertikalablenkung antreibt, mit einer von der Versuchsstanddrehzahl abgeleiteten Wechselspannung gespeist wird. Das Blockschaltbild der hierzu entwickelten Steuerelektronik ist in Bild 3.18 dargestellt.

Von der Welle des Versuchsstandes werden über eine Zahnscheibe drehzahlproportionale Triggerimpulse erzeugt, die nach Teilung auf die erforderliche Frequenz einen digitalen Sinusgenerator steuern. Ein Tiefpassfilter eliminiert alle hochfrequenten Anteile, so daß nach Verstärkung und Leistungsanpassung durch einen Ausgangsübertrager eine zur Drehzahl der Zahnscheibe frequenzproportionale und streng phasenstarre Wechselspannung zur Verfügung steht.

Diese dient als Antriebsspannung des Synchronmotors in der Kamera, welcher den Polygonspiegel der Horizontalablenkung antreibt. Sämtliche weiteren Triggerimpulse für den kamerainternen Bildaufbau werden kameraseitig von der Drehzahl dieses Spiegels abgeleitet, so daß sich die Synchronisation auf die externe Spannungsversorgung des Spiegelmotors beschränkt.

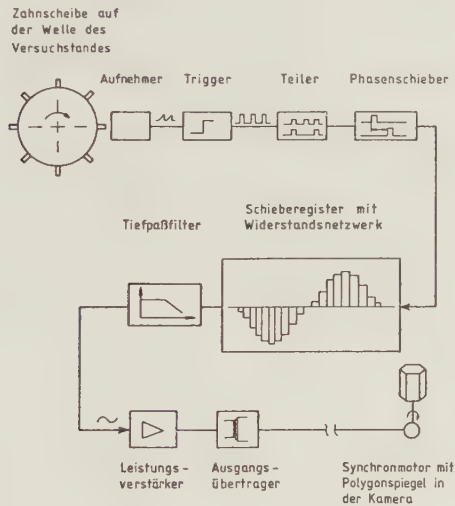


Bild 3.18: Blockschaltbild der Steuerelektronik zur Kamerasynchronisation

Den genannten Vorteilen des stroboskopischen Effektes steht allerdings als Nachteil eine leichte Verzerrung des aufgenommenen Bildes gegenüber. Diese erklärt sich aus der Tatsache, daß die Abtastung einer Bildzeile im Gegensatz zur stroboskopischen Betrachtung von Laufrädern mit Blitzlampen einen Zeitraum von ca. 500 μ s in Anspruch nimmt, währenddessen sich das Laufrad um einen bestimmten Winkel weiter-

dreht. Diese Verzerrung hat jedoch keine Einbußen an geometrischer Auflösung zur Folge und kann analytisch berechnet werden. Hierzu ist in Bild 3.19 ein auf einer Kreisbahn rotierender Punkt dargestellt.

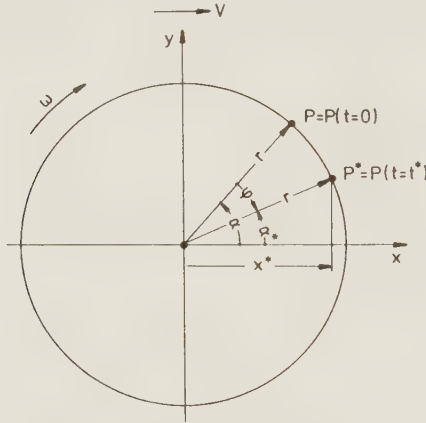


Bild 3.19: Zur Berechnung der Verzerrung

Der Punkt P rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Zusätzlich bewege sich der Meßfleck der Kamera mit der konstanten Geschwindigkeit V zeilenweise von links nach rechts über das Bild. Der Zeitpunkt $t = 0$ liege dann vor, wenn der Meßfleck die y -Achse schneidet. Zu diesem Zeitpunkt soll der zu betrachtende Punkt P die in Bild 3.19 dargestellte Lage einnehmen. Dieser Punkt wird zum Zeitpunkt $t = t^*$ vom Meßfleck der Kamera gesehen und hat sich dann um den Winkel $\varphi = \omega t^*$ weitergedreht. Die x -Koordinate berechnet sich für diesen Zeitpunkt $t = t^*$, bezogen auf den rotierenden Punkt, zu:

$$x^* = r \cos(\alpha - \omega t^*)$$

und bezogen auf den Meßfleck zu:

$$x^* = V t^*$$

Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen ergibt sich mit

$$V t^* = r \cos(\alpha - \omega t^*) \quad (3.15)$$

eine Gleichung, aus welcher der Abtastzeitpunkt t^* iterativ berechnet werden kann. Damit liegen die Koordinaten x^* , y^* des Punktes fest, mit denen dieser in dem Thermogramm wiedergegeben wird:

$$\begin{aligned} x^* &= r \cos(\alpha - \omega t^*) \\ y^* &= r \sin(\alpha - \omega t^*) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bild 3.20 zeigt den Einfluß der Rotation auf die entstehenden Verzerrungen. In diesem Bild sind die verzerrten Radialstrahlen einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die senkrecht stehenden Radialstrahlen unverzerrt wiedergegeben werden. Maximale Verzerrungen ergeben sich für diejenigen Radialstrahlen, welche in Abtastrichtung liegen.

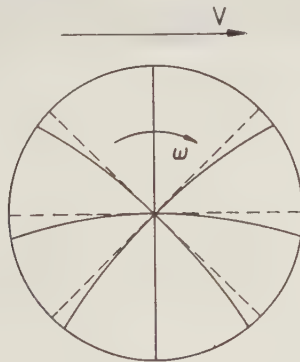


Bild 3.20: Verlauf der Verzerrungen von Radialstrahlen auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe

---- ruhende Scheibe, ——— rotierende Scheibe

Den Einfluß der Verzerrung auf das Versuchslaufrad verdeutlicht Bild 3.21. Neben einer scheinbaren Verlängerung der Strömungskanäle beim linken Laufradsektor verändert sich bei den rechten und unteren Sektoren die Krümmungsrichtung der Schaufelskelettlinien.

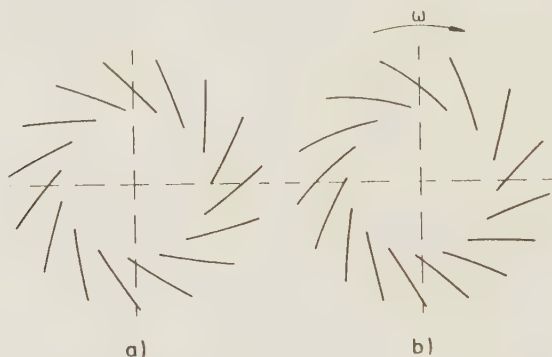


Bild 3.21: Verlauf der Schaufelskelettlinien für das
a) stillstehende und b) rotierende Laufrad

Aufgrund der durch die Reproduktion nur schlecht darstellbaren Details und dem Verlust an Auflösungsvermögen wird an dieser Stelle nur exemplarisch ein Thermogramm des rotierenden Laufrades wiedergegeben. Auf quantitative Aussagen wird verzichtet und nur ein Eindruck des Meßverfahrens anhand der dargestellten Bilder vermittelt. Insbesondere ist zu beachten, daß wegen der in Abschnitt 3.1.4 beschriebenen Meßwertverfälschungen eine unmittelbare Auswertung der Thermogramme ohne Berücksichtigung des jeweiligen Skalenfaktors ohnehin nicht möglich ist.

Die quantitative Darstellung der gemessenen Temperaturverteilungen für drei verschiedene Betriebspunkte ist in Abschnitt 4.4 enthalten, in dem die gemessenen Oberflächen-

temperaturen mit Rechenwerten verglichen werden.

Bild 3.22 zeigt ein Thermogramm des mit 13200 min^{-1} rotierenden Laufrades, wobei kältere Bereiche dunkel und wärmere Bereiche hell wiedergegeben sind. Es ist aus schrägem Blickwinkel der Bereich des Laufradeinlaufes sowie der beschauelte Laufradteil durch das Germanium-Fenster dargestellt.

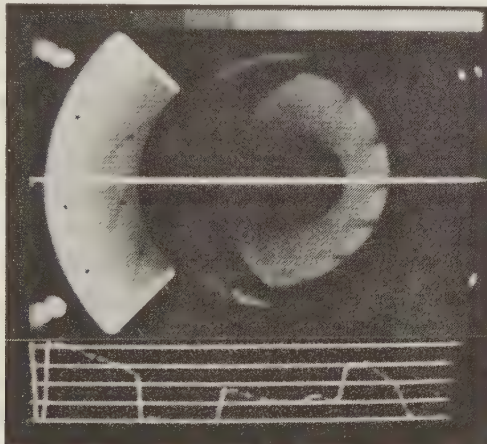


Bild 3.22: Thermogramm des mit 13200 min^{-1} rotierenden Laufrades aus schrägem Blickwinkel thermografiert

Im Bereich des Laufradeinlaufes, der teilweise durch das kurze Ansaugrohr verdeckt ist, sind gut die kältere Einlaufkappe sowie die kälteren Schaufeleintrittskanten zu erkennen, die sich von der wärmeren Radscheibe deutlich abheben. Die auf gleichem Radius höhere Temperatur der Radscheibe im Vergleich zu den Schaufeln wird hervorgerufen durch den Wärme- fluß innerhalb des Radscheibenkörpers vom Laufradaustrittsbereich zur Nabe hin.

Einen qualitativen Eindruck von der radialen Temperaturverteilung vermittelt die linke Hälfte des Bildes, in der der

beschaufelte Laufradteil durch die Germanium-Scheibe thermografiert dargestellt ist. Zur Identifikation sind die Schaufelköpfe auf zwei Radian mit blanken Punkten versehen, die in dem Thermogramm aufgrund ihrer kleineren Emissionszahl als Stellen scheinbar geringerer Temperatur dunkel erscheinen. Die bereits für den Einlauf getroffene Feststellung der kälteren Schaufeln im Vergleich zur Radscheibe trifft auch für diesen Teil des Bildes zu, wobei sich der Effekt mit zunehmendem Radius verringert. Am Laufradaustritt besitzen die Schaufeln nahezu die gleiche Temperatur wie die Radscheibe, und sind deshalb in dem Thermogramm nicht mehr zu erkennen.

Die Temperaturverteilung entlang der in das Bild eingeblendeten horizontalen Linie ist im unteren Teil des Bildes in Form eines Diagrammes wiedergegeben. Die unterste Linie des Diagrammes entspricht einer Temperatur von 25°C , und der Abstand der Linien beträgt 5°C .

Zur quantitativen Auswertung der Thermogramme ist eine größere Auflösung der Kamera gewählt worden. Diese Thermobilder liefern zwar eine wesentlich größere Ablesegenauigkeit der gemessenen Temperaturen, werden aber wegen der schlecht erkennbaren Kontrastunterschiede an dieser Stelle nicht wiedergegeben.

4. Berechnung der Laufradtemperaturverteilung aus Wärmeübergangsgesetzen

Eine theoretische Erfassung der ungleichförmigen Temperaturverteilung zur Berechnung der sich in Verdichterlaufrädern ergebenden Wärmespannungen und -dehnungen erscheint nicht nur deshalb wünschenswert, weil eine experimentelle Ermittlung des Temperaturfeldes stets mit großem, meßtechnischen Aufwand verbunden ist, sondern sie bietet sich auch aus dem Grunde an, weil die zur Festigkeitsanalyse benötigte Geometrieaufbereitung des Laufrades nach der Methode der finiten Elemente bereits vorliegt. Diese kann ohne Einschränkungen auch zur Berechnung der Temperaturverteilung verwendet werden. Zusätzlich wirkt sich die Tatsache begünstigend aus, daß ein vorhandenes Rechenprogramm zur Festigkeitsanalyse relativ leicht zur Temperaturrechnung umgearbeitet werden kann, da sich die hierzu benötigten Algorithmen und Gleichungssysteme in eine Form bringen lassen, die den Formulierungen der Festigkeitsrechnung entspricht (Anhang A2).

Voraussetzung für richtige Rechenergebnisse ist eine möglichst korrekte Erfassung der thermodynamischen Zustände sowie der Wärmeübergangsgesetze auf der Oberfläche des Laufrades, welche als Randbedingungen unmittelbaren Einfluß auf die Rechengenauigkeit ausüben.

Im folgenden wird ein auf vereinfachenden Annahmen beruhendes Modell beschrieben, das die zur Temperaturberechnung erforderlichen Wärmeübergangsgesetze bereitstellt, wobei die benötigte Geschwindigkeitsverteilung im Laufradkanal zunächst durch eine zweidimensionale Rechnung abgeschätzt wird. Diese wird mit Hilfe ergänzend durchgeführter Messungen der Geschwindigkeitsverteilung im Versuchslaufrad korrigiert.

Mit dem Vorliegen der tatsächlich vorhandenen, gemessenen Geschwindigkeitsverteilung wird durch den Vergleich der berechneten Laufradoberflächentemperaturen mit den infrarot-

optisch gemessenen eine Abschätzung über die Richtigkeit der jeweiligen örtlichen Wärmeübergangszahlen möglich, da mit dem gemessenen Geschwindigkeitsprofil die relevanten strömungsmechanischen Größen aus Rechnung und Versuch in etwa übereinstimmen.

4.1 Voraussetzungen für die Berechnung

Im folgenden werden die notwendigen Vereinbarungen und Voraussetzungen festgelegt, auf denen das thermodynamische und strömungsmechanische Modell zur Festlegung des örtlichen Wärmeüberganges auf der Laufradoberfläche beruht.

Um die geometrischen Verhältnisse unter Versuchsbedingungen möglichst genau nachbilden zu können, ist für die Temperaturrechnung die Einlaufkappe und ein Teil der Welle mit in die Finite-Element-Struktur des Laufrades einbezogen.

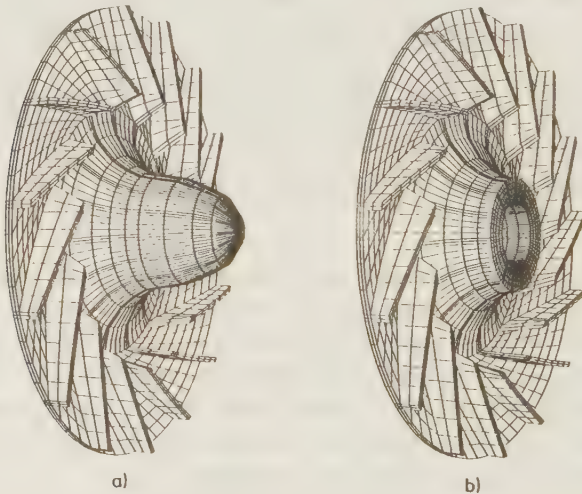


Bild 4.01: Finite-Element-Strukturen des Versuchslaufrades
a) mit und b) ohne Einlaufkappe dargestellt

Bild 4.01 zeigt das mit finiten Elementen nachgebildete Laufrad einmal mit Einlaufkappe und Wellenabsatz sowie zum Vergleich das Laufrad allein.

Die zusätzliche Einbeziehung der Einlaufkappe in die Geometrienaachbildung gewährleistet, daß auf der Vorderseite des Laufrades die Verhältnisse beim Versuch möglichst genau nachgebildet werden können, da bei der Berechnung des Laufrades ohne Einlaufkappe für den Übergang zwischen Laufrad und fehlender Einlaufkappe Annahmen über den Temperaturverlauf notwendig sind. Darüber hinaus ist ein Teil der Welle ebenfalls in die Rechnung einbezogen. Damit ist eine Annahme über den Temperaturverlauf lediglich auf der Laufradrückseite an der Schnittfläche der Welle notwendig, die allerdings auf die gesamte Temperaturverteilung des Laufrades nur einen vernachlässigbaren Einfluß ausübt, da die entsprechende Querschnittsfläche im Vergleich zur restlichen Laufradoberfläche sehr klein ist.

In Bild 4.02 sind die verschiedenen Randbedingungen für den Meridianschnitt des Laufrades dargestellt.

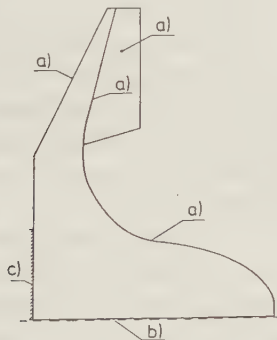


Bild 4.02: Zur Festlegung der Randbedingungen

- a) Wärmeübergang aus α -Zahlen
- b) adiabate Oberfläche
- c) konstante Temperaturverteilung

Wegen der Verwendung von Zylinderkoordinaten gelingt es nicht, die Welle vollständig bis zur Symmetrielinie nachzubilden, da wegen der dort vorhandenen Singularitäten, die durch die Terme mit dem Radius im Nenner hervorgerufen werden, die Rechnung versagt. Es reicht allerdings mit vernachlässigbarem Fehler aus, die Welle nur bis zu einem bestimmten kleinen Radius mit finiten Elementen nachzubilden und für die verbleibende Schnittfläche eine adiabate Oberfläche als Randbedingung vorzugeben. Der durch diese Maßnahme eventuell unberücksichtigte radiale Wärmestrom nimmt wegen der kleinen Fläche nur geringe Werte an und liefert darüber hinaus aufgrund des in diesem Bereich rotationssymmetrischen Temperaturverlaufes nur einen sehr kleinen Beitrag zum axialen Wärmetransport.

Als weitere Voraussetzungen zur Temperaturrechnung sind festgelegt:

- Eine periodisch rotationssymmetrische Temperaturverteilung entsprechend einer Schaufelteilung, so daß zur Bestimmung der Temperaturen die Berechnung eines herausgeschnittenen Laufradsektors in Analogie zur Festigkeitsrechnung ausreicht.
- Isotroper Werkstoff mit in alle Koordinatenrichtungen gleicher Wärmeleitfähigkeit λ ; eine anisotrope Verteilung der Wärmeleitfähigkeiten kann z.B. für stark geknetete Legierungen prinzipiell mit der Methode der finiten Elemente berücksichtigt werden (Anhang 2).
- Eine zweidimensionale Geschwindigkeitsverteilung in den Strömungskanälen. Abweichungen von dieser Voraussetzung, die für das Versuchslaufrad mit den durchgeführten Laser-Zwei-Fokus-Messungen ein deutlich fülligeres Geschwindigkeitsprofil in Umfangsrichtung ergeben, werden durch entsprechende Korrekturfaktoren berücksichtigt.

4.2 Wärmeübergang auf der Laufradoberfläche

Um die Temperaturverteilung in einem Radiallaufrad berechnen zu können, sind für die Oberfläche Randbedingungen in Form von Wärmeübergangszahlen und Fluidtemperaturen festzulegen.

Während im Rahmen dieser Arbeit für die Bestimmung der Wärmeübergangszahlen auf der Laufradrückseite auf Arbeiten zurückgegriffen werden konnte, welche die Berechnung der örtlichen Wärmeübergangszahlen rotierender Scheiben zum Inhalt haben /48, 49, 50/ und die erhaltenen Gesetzmäßigkeiten experimentell bestätigen /51/, sind für den Wärmeübergang auf der Laufradvorderseite vereinfachende Voraussetzungen einzuführen, um zu Aussagen über die Verteilung der örtlichen Wärmeübergangszahlen zu gelangen.

Zuverlässige Angaben über Wärmeübergangszahlen im Strömungskanal sind erst aus dreidimensionalen, kompressiblen Strömungsrechnungen zu erwarten, welche in der Lage sind, im Grenzschichtbereich die Geschwindigkeitsverteilung und damit das Temperaturprofil genügend genau wiederzugeben.

Um dennoch im Rahmen dieser Arbeit zu geeigneten Abschätzungen zu gelangen, mit deren Hilfe eine für die Festigkeitsanalyse verwendbare Laufradtemperaturverteilung berechnet werden kann, werden für den Wärmeübergang auf der Laufradvorderseite die Gesetzmäßigkeiten der längsangeströmten, ebenen Platte zugrunde gelegt. Als Begründungen, die diese Vorgehensweise zumindest in erster Näherung rechtfertigen, sind zu nennen:

- Bei einer turbulenten Grenzschicht hängen die Geschwindigkeitsprofile stark von dem Druckgradienten in Strömungsrichtung ab, wobei für divergierende Kanäle (Druckanstieg) der Einfluß deutlicher ausgeprägt ist als für konvergierende Kanäle. Im konvergierenden Kanal ist die Grenzschichtdicke wesentlich geringer als bei gleichbleibendem Druck, während sie im divergierenden Kanal bis zur Kanalmitte reichen kann /44/.

Einen gegenteiligen Effekt üben im rotierenden Kanal eines Radialverdichters die Zentrifugal- und die Corioliskräfte aus, infolge derer die Grenzschicht dünner wird. Es wird in erster Näherung angenommen, daß sich die beiden genannten, gegenteiligen Effekte in etwa kompensieren.

- Ein deutlicher Fehler ist bei der Abschätzung des schaufel-seitigen Wärmeüberganges in Kauf zu nehmen. Sowohl die Fliehkraft als auch die Coriolisbeschleunigung besitzen eine Kraftkomponente in Richtung der Schaufelnormalen und verändern damit den Verlauf der Geschwindigkeitsgrenzschicht im Vergleich zur Platte. Es kann allerdings in erster Näherung davon ausgegangen werden, daß sich die unterschiedlichen Einflüsse auf der Schaufelsaug- und Schaufel-druckseite in etwa ausgleichen und die resultierende Temperaturverteilung in der Schaufel richtig berechnet wird.

Die zur Berechnung des Wärmeüberganges auf der Laufradoberfläche verwendeten Gesetze werden im folgenden für den Laufradkanal und die Laufradrückseite näher beschrieben.

4.2.1 Wärmeübergang bei hohen Geschwindigkeiten

Die spezifische, über die Oberfläche übertragene Wärmestromdichte $\dot{q}$ berechnet sich mit der Wärmeübergangszahl α und der Temperaturdifferenz aus Oberflächentemperatur der Wand T_0 und Fluidtemperatur T_e zu:

$$\dot{q} = \alpha(T_0 - T_e) \quad (4.01)$$

Die Fluidtemperatur T_e wird im folgenden als Eigentemperatur bezeichnet und erfaßt den Einfluß der inneren Reibung in der Grenzschicht, welche bei den in Radiallaufrädern vorliegenden hohen Relativ- bzw. Absolutgeschwindigkeiten zu berücksichtigen ist /44, 45/. Durch die Reibung entsteht Dissipationswärme, die das Temperaturprofil in der Grenzschicht deutlich beeinflusst. Dabei nimmt ein vollständig umströmter Körper

eine Temperatur an, die über der statischen Temperatur der Außenströmung liegt.

In Bild 4.03 sind diese Verhältnisse qualitativ dargestellt. Es ist der Temperaturverlauf in der Grenzschicht für drei verschiedene Fälle des wandseitigen Wärmeüberganges $\dot{q}_W$ dargestellt.

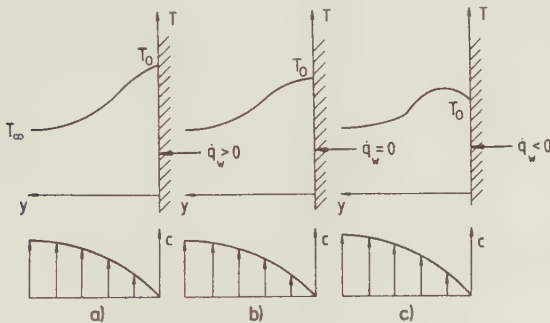


Bild 4.03: Temperaturverlauf in der Grenzschicht einer mit großer Geschwindigkeit umströmten Wand /53/,
 T_∞ statische Temperatur außerhalb der Grenzschicht
 T_0 Oberflächentemperatur der Wand
 a) $\dot{q}_W > 0$; b) $\dot{q}_W = 0$; c) $\dot{q}_W < 0$

Im adiabaten Fall kann durch die Haftbedingung an der Wand die Eigentemperatur T_e mit der Totaltemperatur T_t gleichgesetzt werden /44,45/:

$$T_e = T_t,$$

bzw.

$$T_e = T_\infty + \frac{1}{c} \frac{c^2}{2}$$

Im nichtadiabaten Fall sind jedoch durch den Wärmetausch innerhalb der Grenzschicht die Eigen- und die Totaltemperatur nicht identisch. Sie unterscheiden sich durch den Rück-

gewinnungsfaktor σ , so daß die für den Wärmeübergang maßgebliche Eigentemperatur berechnet werden kann aus:

$$T_e = T_\infty + \sigma \frac{1}{c_p} \frac{c^2}{2} \quad (4.02)$$

Der Rückgewinnungsfaktor hängt neben der Reynoldszahl Re in erster Linie von dem Verhältnis der molekularen Austauschgrößen aus Impuls und Energie und damit von der Prandtlzahl Pr ab. In Bild 4.04 ist der Verlauf des Rückgewinnungsfaktors σ für Luft ($Pr = 0,7$) in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re aufgetragen /45/.

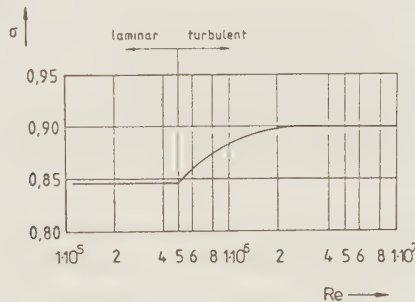


Bild 4.04: Verlauf des Rückgewinnungsfaktors σ für Luft /45/

4.2.2 Wärmeübergang im Laufradkanal

Wie bereits erläutert, wird der Wärmeübergang im Laufradkanal auf den der längsangeströmten Platte zurückgeführt.

Unter Voraussetzung einer turbulenten Strömung berechnet sich die örtliche, mit der Lauflänge l gebildete Nusseltzahl

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (4.03)$$

aus dem folgenden Zusammenhang /45/:

$$Nu = \frac{0,0297 Re^{0,8} Pr}{1 + C Re^{-0,1} (Pr - 1)} \quad (4.04)$$

mit
$$C = 1,305 \operatorname{Pr}^{-\frac{1}{6}} \quad (4.05)$$

Die Reynoldszahl Re ist ebenfalls mit der Lauflänge l zu bilden:

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu} \quad (4.06)$$

Die Lauflänge l wird vom Einlauf des Laufrades an gezählt (Bild 4.05).

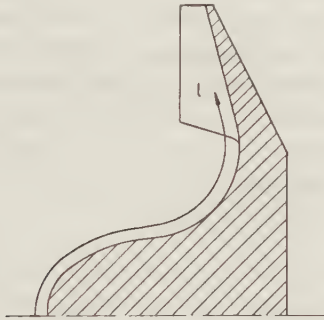


Bild 4.05: Zur Festlegung der Lauflänge l

Die Reynoldszahl in Gleichung 4.06 muß mit der Relativgeschwindigkeit w gebildet werden, wozu die Geschwindigkeitsverteilung im Strömungskanal zumindest in erster Näherung bekannt sein muß. Näheres hierzu ist in Abschnitt 4.3 dargelegt.

4.2.3 Wärmeübergang am Laufradeinlauf

Der Laufradeinlauf umfaßt die Einlaufkappe sowie den Bereich der unbeschauelten Radscheibe, in welcher die Strömung in die radiale Richtung umgelenkt wird.

Wegen der relativ geringen Druck- und Temperaturunterschiede in diesem Bereich kann der Volumenstrom näherungsweise als konstant vorausgesetzt werden. Für drallfreie Zuströmung

folgt damit die Relativgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{u^2 + c_m^2} \quad (4.07)$$

aus dem Volumenstrom am Eintritt mit

$$c_m = \frac{\dot{V}}{A} \quad (4.08)$$

in Abhängigkeit der jeweiligen Querschnittsfläche A und der Umfangsgeschwindigkeit u.

Die Grenzschicht, die sich von der Vorderkante der Einlaufkappe an ausbildet, ist zunächst laminar und schlägt bei der kritischen Reynoldszahl Re_{kr} in eine turbulente Grenzschicht um. Der Umschlagpunkt wird in Analogie zur Plattenströmung bei einer Reynoldszahl $Re_{kr} \approx 5 \cdot 10^5$ angenommen und befindet sich bei den vorliegenden Geschwindigkeiten ca. 70 mm hinter der Vorderkante der Einlaufkappe.

Im laminaren Bereich ist die örtliche Nusseltzahl unter Berücksichtigung des Anlaufes durch folgende Beziehung festgelegt /45/:

$$Nu = 0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re} \quad (4.09)$$

Für den turbulenten Bereich wird die Beziehung verwendet, die bereits zur Berechnung des Wärmeüberganges im Laufradkanal angegeben worden ist:

$$Nu = \frac{0,0297 Re^{0,8} Pr}{1 + 1,305 Pr^{-\frac{1}{6}} Re^{-0,1} (Pr - 1)} \quad (4.10)$$

4.2.4 Wärmeübergang auf der Laufradrückseite

Der Wärmeübergang auf der Laufradrückseite kann auf die Verhältnisse einer rotierenden Scheibe zurückgeführt werden.

Dieses Problem ist für eine rotierende Scheibe mit konstanter radialer Temperaturverteilung mit Hilfe der Reynoldsanalogie

gelöst worden /48/, wobei für den Geschwindigkeitsverlauf in der turbulenten Grenzschicht das 1/7-Potenz-Gesetz vorausgesetzt wird. Die Grenzschicht ist turbulent, wenn $Re > 3 \cdot 10^5$ ist, wobei die Reynoldszahl Re mit dem Radius r gebildet wird:

$$Re = \frac{u \cdot r}{\nu} = \frac{\omega \cdot r^2}{\nu} \quad (4.11)$$

Bezogen auf das vorliegende Laufrad können auf der gesamten Radscheibenrückseite turbulente Verhältnisse vorausgesetzt werden, da der Radius, bei dem die laminare Grenzschicht in eine turbulente übergeht ($r \approx 50\text{mm}$), in etwa mit dem Wellenradius identisch ist. Darüber hinaus wirken sich Fehler bei der Abschätzung der Wärmeübergangszahl bei kleinen Radien wegen der gleichzeitig kleinen Querschnittsflächen sehr gering aus.

Die in /48/ enthaltenen Ergebnisse sind in /49/ auf rotierende Scheiben mit parabolischer Wandtemperaturverteilung in radialer Richtung erweitert worden. Dort ist folgende Beziehung für die örtliche, mit dem Radius gebildete Nusseltzahl

$$Nu = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda}$$

angegeben:

$$Nu = 0,0287 \cdot Re^{0,8} \quad (4.12)$$

In /51/ ist eine Beziehung für die Nusseltzahl wiedergegeben, in welcher auch nichtparabolische Temperaturverteilungen der Scheibe berücksichtigt werden können:

$$Nu = 0,0212 \cdot (m + 2,6)^{0,2} \cdot Re^{0,8} \quad (4.13)$$

Der Zahlenwert für m in Gleichung 4.13 berücksichtigt den radialen Verlauf der Scheibentemperatur und ist definiert durch

$$T_0 - T_e = B \cdot r^m \quad (4.14)$$

mit T_0 als Oberflächentemperatur der Scheibe, T_e als Eigentemperatur und B als beliebigem Faktor. Für $m = 2$ geht Gleichung 4.13 in Gleichung 4.12 über.

Da zu Beginn der Rechnung die Temperaturverteilung des Laufrades noch nicht bekannt ist, um den richtigen Exponenten m für die Gleichung 4.14 schon zu Beginn der Rechnung ermitteln zu können, muß dieser zunächst geschätzt und anschließend iterativ korrigiert werden.

Die zur Berechnung des Wärmeüberganges benötigten Eigentemperaturen T_e werden aus der Umfangsgeschwindigkeit u ermittelt aus:

$$T_e = T_U + \sigma \frac{u^2}{2 c_p} = T_U + \sigma \frac{(\omega r)^2}{2 c_p} \quad (4.15)$$

Hierin bedeutet T_U die statische Temperatur der Umgebung im Bereich der Laufradrückseite.

4.3 Geschwindigkeitsverteilung im Laufradkanal und ergänzende Messungen mit dem Laser-Zwei-Fokus-Verfahren

Zur Berechnung des Wärmeüberganges im Laufradkanal, welcher durch die örtlichen Wärmeübergangszahlen und die Differenz aus Laufradoberflächentemperatur und Fluidtemperatur festgelegt ist, wird die Geschwindigkeitsverteilung benötigt. Eine in der Literatur /9, 10, 52/ häufig beschriebene Möglichkeit zur näherungsweisen Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in den Kanälen von Radialverdichterlaufrädern geht von dem vereinfachten radialen Gleichgewicht einer reibungsfreien Relativströmung aus, um zu einer Aussage über die Geschwindigkeitsverteilung in Umfangsrichtung zu gelangen. Diese wird im folgenden erläutert.

Ergänzend ist für das Versuchslaufrad die vorhandene Geschwindigkeitsverteilung mit dem Laser-Zwei-Fokus-Verfahren (L2F-Verfahren) gemessen worden /38,39/, wobei sich zum Teil deut-

liche Abweichungen zwischen der gemessenen und der berechneten Geschwindigkeitsverteilung ergeben. Für die Bestimmung der Wärmeübergangszahlen wird die gemessene Geschwindigkeitsverteilung zugrunde gelegt.

4.3.1 Analytisch berechnete Geschwindigkeitsverteilung

Mit den in Bild 4.06 dargestellten Kräften auf ein Fluidteilchen der Masse

$$dm = \rho \, b \, ds \, dn$$

mit b als Kanalhöhe normal zur Zeichenebene ergibt die Kräftebilanz senkrecht zur Strömungsrichtung (n -Richtung):

$$-\frac{w^2}{R} + 2\omega w + r\omega^2 \cos \beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.16)$$

Durch Gleichung 4.16 wird der Druckgradient senkrecht zur Strömung durch die Relativbeschleunigung, die Coriolisbeschleunigung und die Zentrifugalbeschleunigung ins Gleichgewicht gesetzt.

Die Kräftebilanz in Strömungsrichtung (s -Richtung) liefert die folgende Gleichung

$$r\omega^2 \sin \beta - \frac{dw}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (4.17)$$

welche mit $\sin \beta = \frac{dr}{ds}$

und mit $\frac{dw}{dt} = w \frac{\partial w}{\partial s}$

umgeformt werden kann in:

$$\omega^2 r \, dr - w \, dw = \frac{1}{\rho} \, dp \quad (4.18)$$

$$\text{bzw.} \quad \omega^2 \, d\left(\frac{r^2}{2}\right) - d\left(\frac{w^2}{2}\right) = \frac{1}{\rho} \, dp \quad (4.19)$$

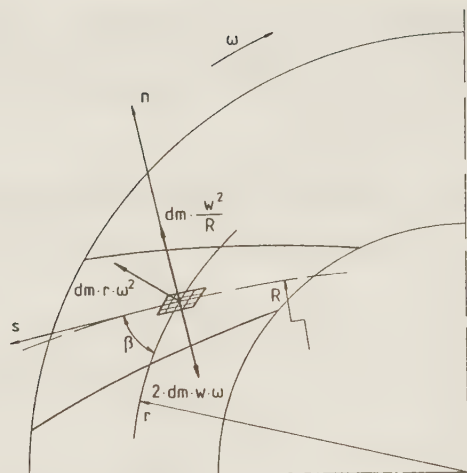


Bild 4.06: Zum Kräftegleichgewicht eines Fluidteilchens dm im Radialverdichterlaufrad
 ω = Winkelgeschwindigkeit, R = Krümmungsradius der Stromlinien

Mit $u = \omega r$ und $dr = \cos \beta \, dn$

folgt aus Gleichung 5.19:

$$r \, \omega^2 \cos \beta - w \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dn} \quad (4.20)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen 4.16 und 4.20 ergibt sich die Differentialgleichung der rotierenden Relativströmung

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{w}{R} - 2\omega, \quad (4.21)$$

welche sich unter Voraussetzung eines linearen Krümmungsradius R und einer angenommenen linearen Geschwindigkeitsverteilung in n -Richtung integrieren läßt. Es ergibt sich für die Differenz zwischen der saugseitigen Geschwindigkeit w_S und der druckseitigen Geschwindigkeit w_D

$$w_S - w_D = \left(\frac{\bar{w}}{R} - 2\omega \right) \Delta n \quad (4.22)$$

mit $\bar{w}$ als mittlerer Geschwindigkeit, welche aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{z \cdot b \cdot \Delta n} \quad (4.23)$$

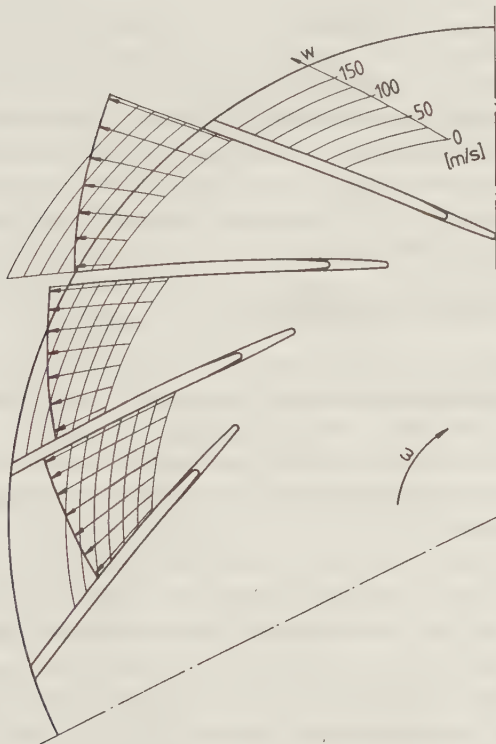


Bild 4.07: Berechnete Relativgeschwindigkeitsverteilung des Versuchslaufrades

Die aus Gleichung 4.22 berechnete Geschwindigkeitsverteilung des Versuchslaufrades ist für drei Radien in Bild 4.07 dargestellt. Der Rechnung liegen die folgenden Zahlenwerte des Bestpunktes der Stufenkennlinie zugrunde:

- Volumenstrom am Eintritt $\dot{V}_1 = 1,22 \text{ m}^3/\text{s}$
- Volumenstrom am Austritt $\dot{V}_2 = 1,03 \text{ m}^3/\text{s}$

Es ist eine lineare Änderung des Volumenstromes zwischen Ein- und Austritt vorausgesetzt.

- Drehzahl des Laufrades $N = 13200 \text{ 1/min}$ ($\omega = 1382 \text{ 1/s}$)

Obwohl durch die gewählte Darstellungsweise der Geschwindigkeitsverteilungen im Laufradkanal nicht erkennbar ist, daß das Profil nahezu linear zwischen Saug- und Druckseite der Schaufel verläuft, wird aus Bild 4.07 der deutliche Geschwindigkeitsunterschied in Umfangsrichtung erkenntlich, der durch Gleichung 4.22 festgelegt ist.

4.3.2 Gemessene Geschwindigkeitsverteilung

Als Meßverfahren ist das von der DFVLR für die spezielle Anwendung im Turbomaschinenbau entwickelte Laser-Zwei-Fokus-Verfahren (L2F-Verfahren) eingesetzt worden /38, 39/, das neben dem Laser-Doppler-Verfahren und dem Funkenblitz-Verfahren /40, 41/ die berührungslose Messung des Geschwindigkeitsvektors gestattet.

Das L2F-Verfahren basiert auf der Messung der Geschwindigkeit sehr kleiner Teilchen, von denen vorausgesetzt wird, daß sie sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen wie das sie umgebende Fluid. Es ist bekannt, daß diese Voraussetzung für sehr kleine Teilchen ($D \approx 1 \text{ }\mu\text{m}$) mit guter Näherung auch bei großen Geschwindigkeitsgradienten zutrifft /38/, so daß mit der gemessenen Teilchengeschwindigkeit die örtliche Strömungsgeschwindigkeit bekannt ist. Geeignete Teilchen sind in der Luft als Aerosole vorhanden. Falls die Konzentration nicht ausreicht, kann durch Zugabe von Fremdteilchen die Meßrate erhöht werden. Im Verlaufe der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Versuche im rotierenden Radiallaufrad hat sich eine

Teilchenzugabe als erforderlich erwiesen. Als Teilchen sind der Strömung fein vernebelte Parafinöltropfen zugegeben worden, welche in einem speziell für diese Zwecke entwickelten Teilchenzerstäuber erzeugt worden sind.

Das Funktionsprinzip des Meßverfahrens sowie die Voraussetzungen zur Messung im rotierenden Laufrad sind in Anhang 4 näher beschrieben.

Im folgenden sind die mit dem L2F-Verfahren gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen wiedergegeben. Die Messungen sind für den Bestpunkt der Kennlinie, welche Bild 3.05 entnommen werden kann, durchgeführt worden. Bei diesem stellt sich am Laufradumfang eine periodisch rotationssymmetrische Verteilung von statischem Druck, totalem Druck, statischer Temperatur und Totaltemperatur ein. Es kann deshalb davon ausgegangen werden, daß die Geschwindigkeitsverteilungen in allen Laufradkanälen gleich sind und daß die gemessenen Verteilungen eines Kanals repräsentativ für das gesamte Laufrad sind.

Der Schaufelkanalverlauf kann Bild 3.01 entnommen werden, in welchem die Konstruktionszeichnung des Laufrades dargestellt ist.

Es sind die Geschwindigkeitsprofile für drei verschiedene Schnitte (I,II,III) wiedergegeben, deren Verläufe durch Bild 4.08 definiert sind. Der Schnitt I verläuft in Deckscheibennähe, der Schnitt II in Kanalmitte und der Schnitt III entlang der Radscheibenkontur.

Die Bilder 4.09 bis 4.11 zeigen die Relativgeschwindigkeitsverteilungen der Schnitte I, II und III. Es sind die Meridiankomponenten der Relativgeschwindigkeit dargestellt, da aus der gemessenen Zeitdifferenz der Teilchendurchgänge durch das Meßvolumen nur die Geschwindigkeitskomponenten in der Ebene normal zur Strahlrichtung erfaßt werden und die Strahlrichtung des L2F-Gerätes bei den Messungen parallel zur Drehachse des Laufrades ausgerichtet gewesen ist.

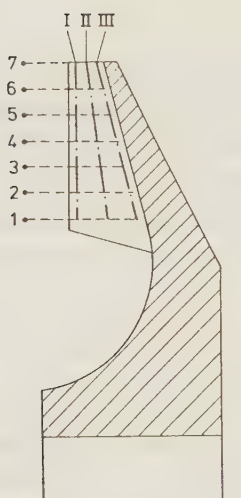


Bild 4.08: Lage der Schnittebenen der gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen

Die gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen verlaufen in Umfangsrichtung tendenziell wie aus der analytischen Lösung zu erwarten ist, nämlich mit kleineren Geschwindigkeiten auf der Druckseite und größeren Geschwindigkeiten auf der Saugseite, bezogen auf den gleichen Radius. Allerdings ist die Neigung der Geschwindigkeitsprofile deutlich geringer als bei der analytisch berechneten Geschwindigkeitsverteilung (Bild 4.07). Dies ist begründet durch den zweidimensionalen Ansatz, bei dem der Einfluß der Anlaufströmung vor dem Schaufeleintritt nicht berücksichtigt ist. Aufgrund einer mäßigen Beschleunigung in der Umlenkung ist von einer nahezu rotationssymmetrischen Verteilung der Meridianströmung in diesem Bereich auszugehen. Als zusätzlicher Einfluß zur Vergleichmäßigung der Profile ist der Reibungseinfluß anzusehen, der in der Rechnung ebenfalls nicht berücksichtigt worden ist.

Zum Laufradaustritt hin ändert sich die Neigung der Profile. Bei den Profilen II und III sind im Bereich der Schaufeldruckseite geringfügig größere Geschwindigkeiten als auf der Saug-

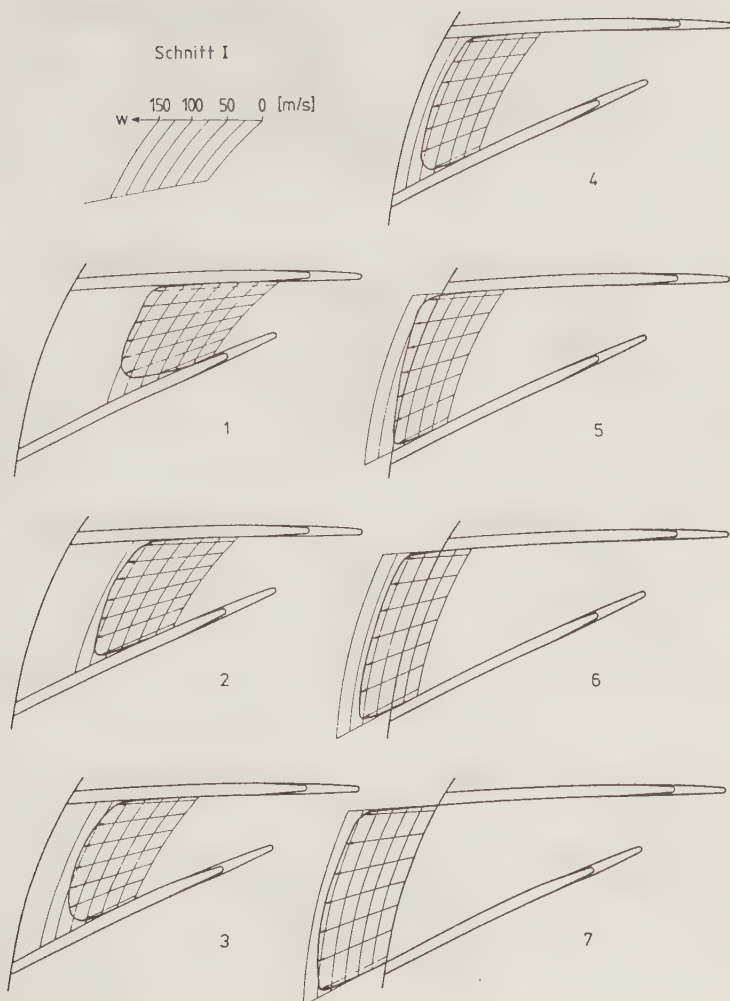


Bild 4.09: Gemessene Verteilung der Relativgeschwindigkeit
in Schnitt I (Deckscheibe)

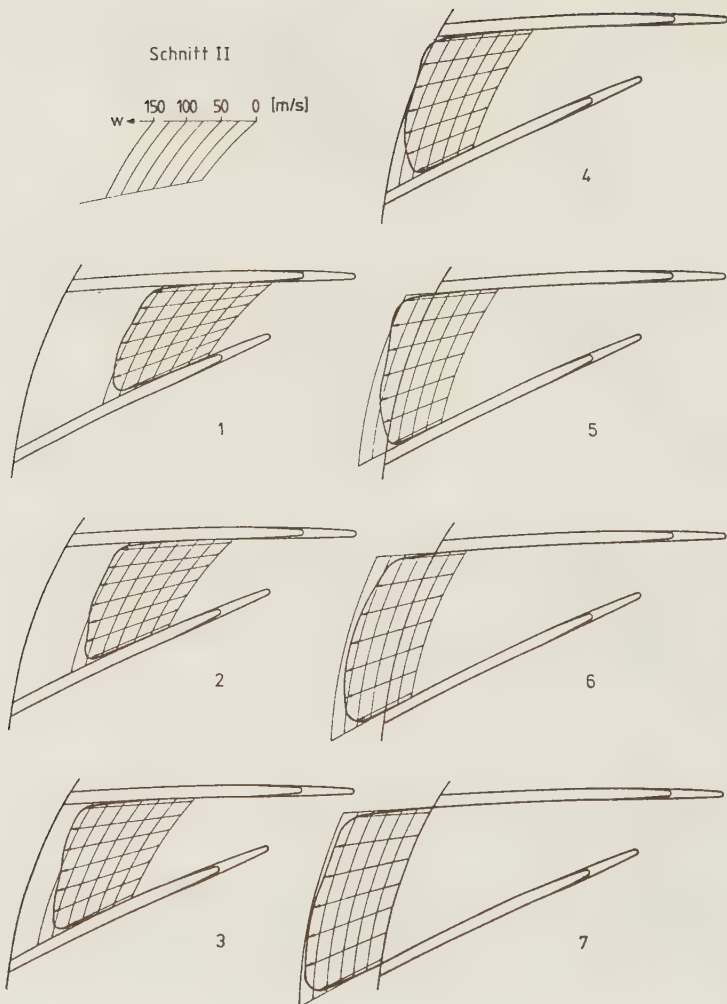


Bild 4.10: Gemessene Verteilung der Relativgeschwindigkeit in Schnitt II (Kanalmitte)

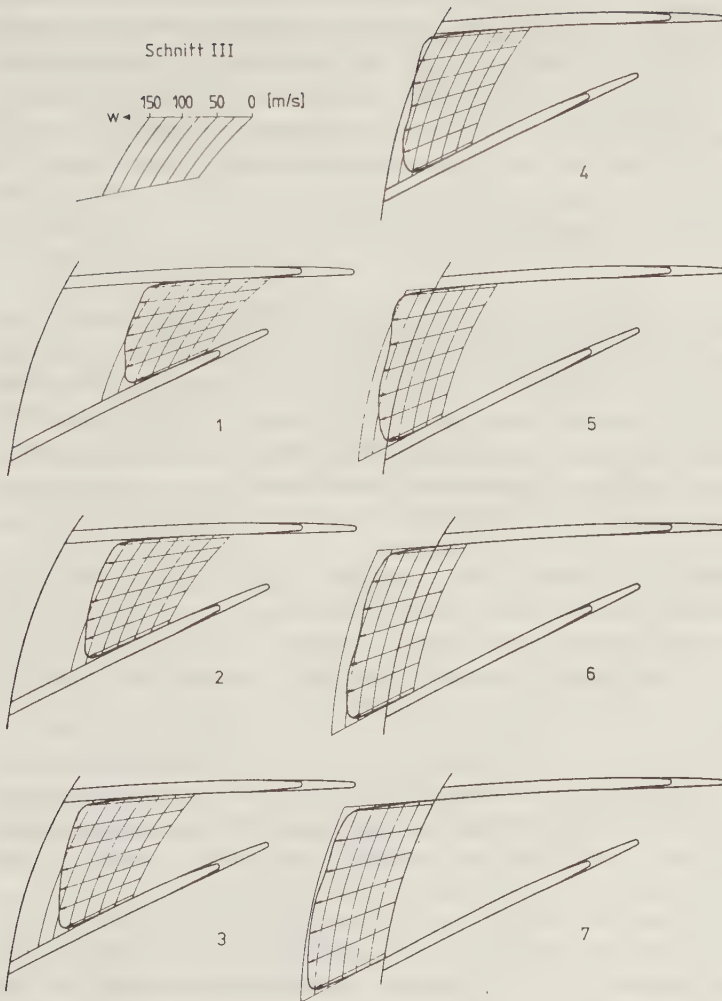


Bild 4.11: Gemessene Verteilung der Relativgeschwindigkeit
in Schnitt III (Radscheibe)

seite gemessen worden. Ein ähnlicher Effekt ist in /39/ und /40/ mit deutlich ausgeprägterer Tendenz festgestellt worden, wobei sich zusätzlich Ablösungen auf der Schaufelsaugseite im Deckscheibenbereich gezeigt haben. Die Ergebnisse in /40/ sind für ein bauähnliches Laufrad mit dem Funkenblitzverfahren ermittelt worden. In /39/ ist die Geschwindigkeitsverteilung eines schnellläufigen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln mit dem L2F-Verfahren gemessen worden.

Für alledrei gemessenen Schnitte ist am Laufradaustritt eine Zunahme der Relativgeschwindigkeit im Vergleich zur davorliegenden Geschwindigkeitsverteilung festzustellen. Dies ist auf den Einfluß der am Kanalausstritt zunehmenden Slipkomponente der Geschwindigkeit zurückzuführen, welche aufgrund der nicht schaufelkongruenten Abströmung eine Zunahme der resultierenden Geschwindigkeit zur Folge hat.

Das Profil im Schnitt I zeigt am Eintritt auf der Schaufeldruckseite eine leichte Ablöseerscheinung, die im nachfolgenden Profil bereits nicht mehr vorhanden ist. Diese Ablösung ist die Folge einer Fehlanströmung des Schaufeleintritts, wobei der Strömungswinkel größer als der Schaufelwinkel ist.

Die Profile in den Schnitten II und III unterscheiden sich auf jeweils gleichem Radius nur geringfügig, während das Profil I, das in Deckscheibennähe gemessen ist, deutlicher von den anderen Profilen abweicht. Für diese Abweichungen sind in erster Linie zwei Einflüsse verantwortlich:

Zum einen erzeugt die nicht mitrotierende Deckscheibe andere Randbedingungen für die Strömung in Wandnähe als dies für die Strömung im Bereich der Radscheibe der Fall ist. Darüberhinaus übt bei dem Profil I bereits die Spaltströmung zwischen feststehender Deckscheibe und rotierendem Schaufelkopf einen Einfluß auf die Geschwindigkeitsverteilung aus. Der Spalt,

welcher bei Laufradstillstand aus Gründen der Betriebssicherheit auf 0,6 mm eingestellt worden ist, erweitert sich im Betrieb durch die fliehkraftbedingten Laufradverformungen erheblich und beträgt bei Betriebsdrehzahl am Laufradaustritt 1,2 mm. Die Spaltströmung ist in /54/ näher untersucht.

4.4 Berechnete Laufradtemperaturverteilung und Vergleich mit Meßwerten

Im folgenden werden die berechneten Temperaturverteilungen, die sich aus den in den vorigen Abschnitten erläuterten Voraussetzungen ergeben, dargestellt und mit den gemessenen Oberflächentemperaturen verglichen.

Für den Bestpunkt der Kennlinie, die durch Bild 3.05 festgelegt ist, ist die berechnete Temperaturverteilung des Versuchslaufrades auf der Oberfläche des Rades in Bild 4.14 und für das geschnittene Laufrad in Bild 4.15 wiedergegeben. Die der Rechnung zugrunde liegenden Verteilungen der Wärmeübergangszahlen und Eigentemperaturen können den Bildern 4.12 bis 4.13 für die Laufradvorder- und Laufradrückseite entnommen werden.

Für den Kennlinienbestpunkt ergibt sich am Laufradaustritt eine statische Temperatur der verdichteten Luft von $T_2 = 42^\circ\text{C}$. Die Luft wird bei Umgebungszustand mit $T_1 = 21^\circ\text{C}$ angesaugt. Als statische Temperatur in der laufradrückseitigen Radkammer liegen der Rechnung als Randbedingung 35°C zugrunde. Dieser relativ geringe Wert ist vorab aus dem Versuch ermittelt worden und ergibt sich aus der nach hinten offenen Bauweise des Versuchsstandes und dem damit intensiven Luftaustausch mit der Umgebung..

Bei dem realen Betrieb eines Verdichterlaufrades in einem geschlossenen Gehäuse sind deutlich höhere Temperaturen in der Radkammer zwischen Laufradrückseite und Gehäuse zu erwarten, da die am Laufradumfang mit der Laufradaustrittstemperatur T_2 austretenden Leckmassenströme nicht unmittelbar

ins Freie entweichen können. Entsprechende Temperaturverteilungen zweier Laufräder bei denen diese Tatsache durch eine höhere Radkammertemperatur berücksichtigt ist, sind in Abschnitt 5 enthalten. Die Temperaturverteilungen dieser Laufräder sind nicht rotationssymmetrisch.

Die der Rechnung zugrunde liegende Verteilung der Eigentemperaturen auf der Laufradvorderseite (Bild 4.13a) ist durch einen Versuch überprüft worden. Dazu sind auf der Radscheibe des beschaukelten Kanales auf mehreren Radien Kunststoffköpfe mit ca. 3 mm Durchmesser isoliert befestigt worden. Unter der Voraussetzung, daß diese aufgrund ihrer im Vergleich zum Laufrad deutlich geringeren Wärmeleitung ($\lambda_{\text{Kunststoff}} \approx 0,2 \text{ W/mK}$, $\lambda_{\text{Aluminium}} \approx 95 \text{ W/mK}$) die Eigentemperatur des vorbeiströmenden Fluids annehmen, kann aus der infrarotoptisch gemessenen Temperatur der Kunststoffköpfe die lokale Eigentemperatur des Fluids in Wandnähe bestimmt werden.

Als Abweichung zwischen der in Bild 4.13a dargestellten Eigentemperaturverteilung und den Meßwerten sind im Kanaleintritt weniger als 0,5 K und im Austritt weniger als 1 K ermittelt worden.

Wie Bild 4.14 zu entnehmen ist, verläuft die berechnete Oberflächentemperaturverteilung am Laufradaustritt bei den hier vorliegenden Randbedingungen nahezu rotationssymmetrisch. Dabei liegt dort das Temperaturniveau mit fast 48°C deutlich über der statischen Fluidtemperatur von 42°C auf der Vorderseite in den Strömungskanälen und von 35°C auf der Rückseite, wodurch der Einfluß der für den Wärmeübergang maßgebenden Totaltemperaturen verdeutlicht wird.

Die Temperatur der Kappe beträgt vorn wegen der Wärmeleitung im Laufradkörper noch 32°C, obwohl dort das Fluid mit Umgebungszustand vorbeiströmt. Aus dem gleichen Grunde ist die Radscheibe am Schaufelanfang noch 39°C warm, obwohl das einströmende Fluid an dieser Stelle noch nahezu Umgebungszustand mit einer Temperatur von ca. 21°C besitzt.

LINIEN KONstanTER ALFAZAHLEN	
0	: 107.32W/M**2/K
1	: 142.60W/M**2/K
2	: 177.88W/M**2/K
3	: 213.16W/M**2/K
4	: 248.44W/M**2/K
5	: 283.72W/M**2/K
6	: 319.00W/M**2/K
7	: 354.29W/M**2/K
8	: 389.57W/M**2/K
9	: 424.85W/M**2/K

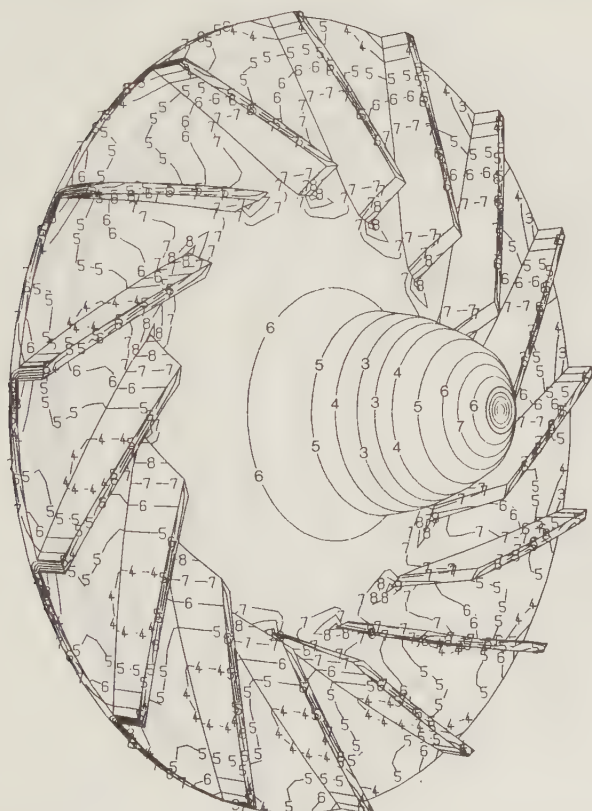


Bild 4.12a: Verteilung der Wärmeübergangszahlen zur Berechnung der Laufradtemperaturverteilung auf der Vorderseite des Laufrades

LINIEN KONSTANTER ALFAZAHLEN	
0	: 107.32W/M**2/K
1	: 142.60W/M**2/K
2	: 177.88W/M**2/K
3	: 213.16W/M**2/K
4	: 248.44W/M**2/K
5	: 283.72W/M**2/K
6	: 319.00W/M**2/K
7	: 354.29W/M**2/K
8	: 389.57W/M**2/K
9	: 424.85W/M**2/K

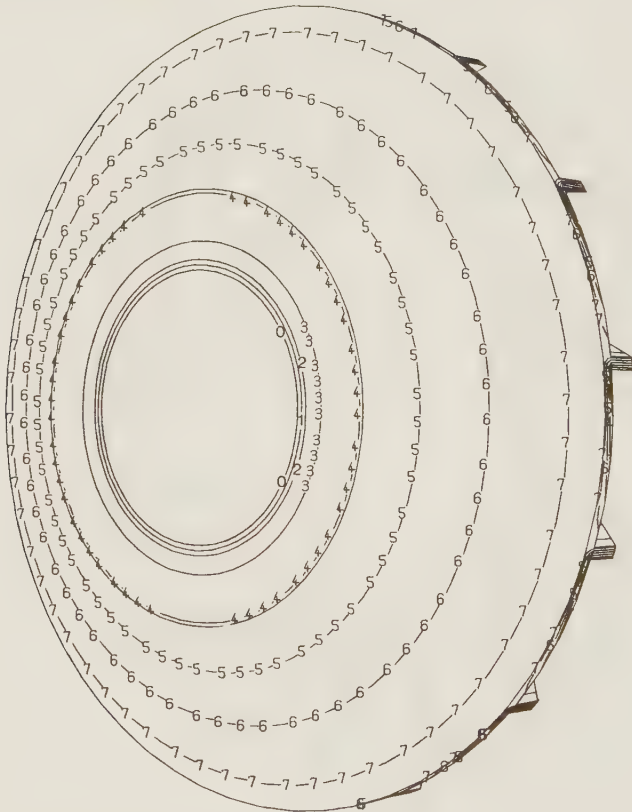


Bild 4.12b: Verteilung der Wärmeübergangszahlen zur Berechnung der Laufradtemperaturverteilung auf der Rückseite des Laufrades

LINIEN KONstanTER EIGENTEMPERATUREN		
0 :	23.40	°C
1 :	27.22	°C
2 :	31.04	°C
3 :	34.87	°C
4 :	38.69	°C
5 :	42.52	°C
6 :	46.34	°C
7 :	50.17	°C
8 :	53.99	°C
9 :	57.81	°C

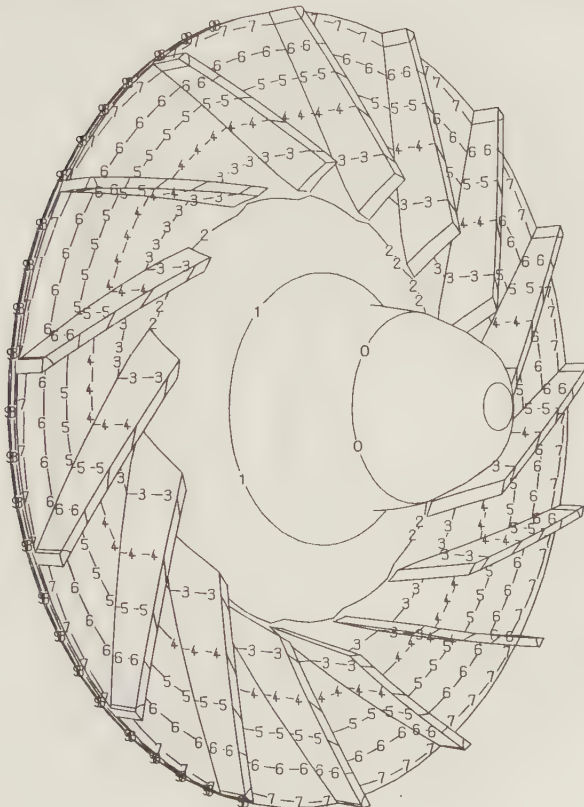


Bild 4.13a: Verteilung der gasseitigen Eigentemperaturen zur Berechnung der Laufradtemperaturverteilung auf der Vorderseite des Laufrades

LINIEN KONSTANTER EIGENTEMPATUREN		
0 :	23.40	°C
1 :	27.22	°C
2 :	31.04	°C
3 :	34.87	°C
4 :	38.69	°C
5 :	42.52	°C
6 :	46.34	°C
7 :	50.17	°C
8 :	53.99	°C
9 :	57.81	°C

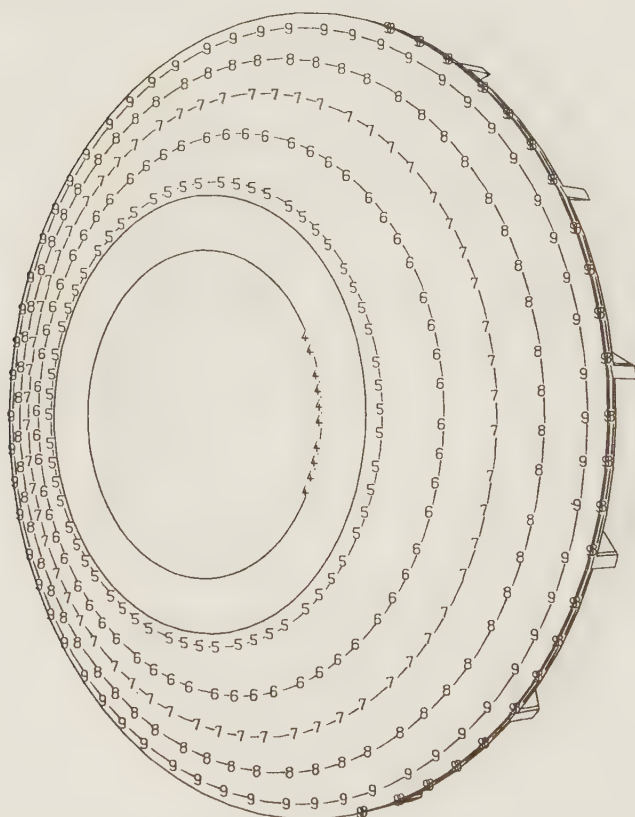


Bild 4.13b: Verteilung der gasseitigen Eigentemperaturen zur Berechnung der Laufradtemperaturverteilung auf der Rückseite des Laufrades

LINIEN KONSTANTER TEMPERATUR			
0	:	32.58	°C
1	:	34.22	°C
2	:	35.86	°C
3	:	37.50	°C
4	:	39.15	°C
5	:	40.79	°C
6	:	42.43	°C
7	:	44.07	°C
8	:	45.71	°C
9	:	47.36	°C

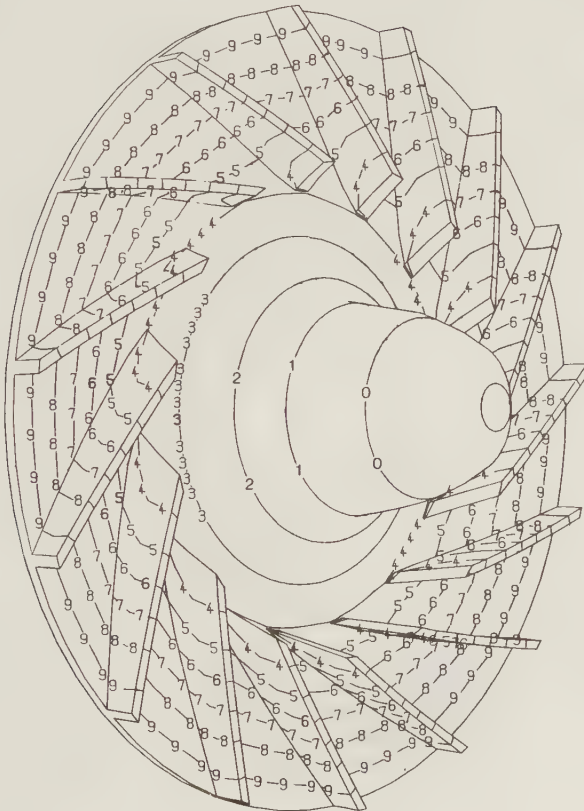


Bild 4.14: Berechnete Temperaturverteilung des Versuchslaufrades auf der Oberfläche

LINIEN KONSTANTER TEMPERATUR		
0	:	32.58 °C
1	:	34.22 °C
2	:	35.86 °C
3	:	37.50 °C
4	:	39.15 °C
5	:	40.79 °C
6	:	42.43 °C
7	:	44.07 °C
8	:	45.71 °C
9	:	47.36 °C

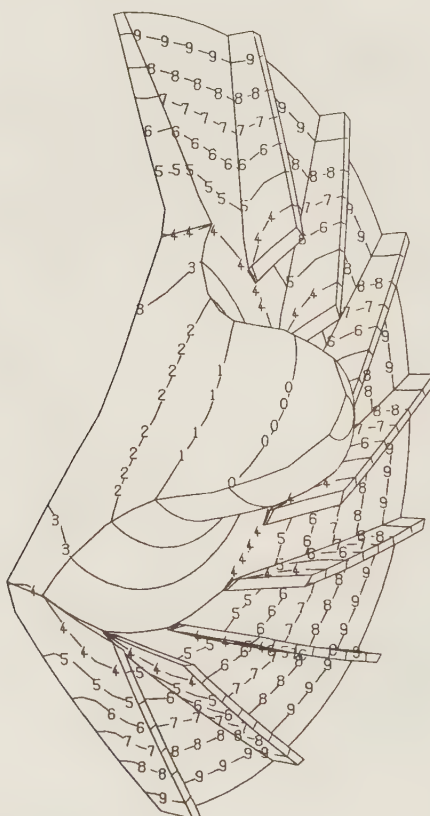


Bild 4.15: Berechnete Temperaturverteilung des Versuchslaufrades, Laufrad geschnitten dargestellt

Der Einfluß des einströmenden Fluids wird zusätzlich durch die axiale Temperaturverteilung der Schaufel im Eintritt verdeutlicht. Die Schaufelspitze ist kälter als der Schaufelfuß auf gleichem Radius, da dieser mit der wärmeren Radscheibe thermisch gekoppelt ist.

Einen Eindruck von den Abweichungen der berechneten Oberflächentemperaturverteilung in Bezug zu der gemessenen verdeutlicht Bild 4.16, in dem die Differenz der Rechenergebnisse T_R und der Meßwerte T_M für die Radscheibenvorder- und Radscheibenrückseite sowie für die Schaufelvorderkante aufgetragen sind. Wegen der nahezu rotationssymmetrischen Temperaturverteilung, die auch durch die Messungen bestätigt worden ist, ist für das Bild eine zweidimensionale Schnittdarstellung des Laufrades gewählt worden. Dabei ist für die Temperaturverteilungen der Radscheibenvorder- und Radscheibenrückseite die Kanalmitte zugrunde gelegt.

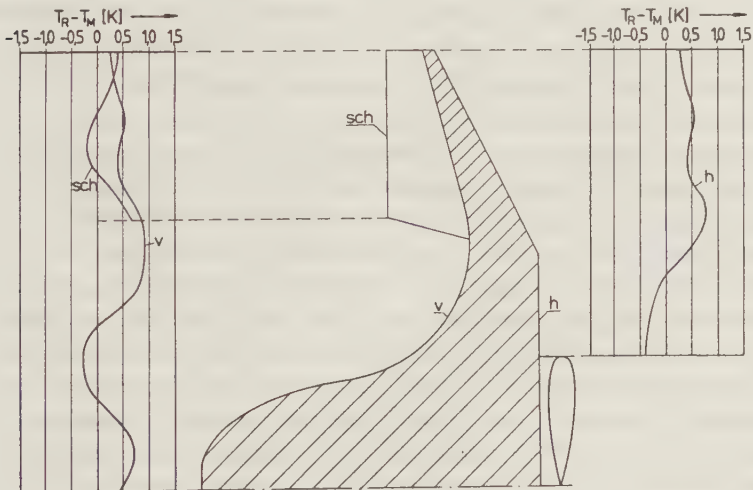


Bild 4.16: Vergleich der gerechneten Temperaturen T_R mit den gemessenen Temperaturen T_M auf den Oberflächen der Radscheibe und auf der Schaufelvorderkante

Wie dem Bild zu entnehmen ist, übersteigen die Abweichungen zwischen Rechnung und Messung lediglich auf der Radscheibenvorder- und Radscheibenrückseite im Bereich des Schaufelanfangs sowie im vorderen Bereich der Einlaufkappe die Grenze von 0,5 K. Für das Laufrad insgesamt ist eine Tendenz zu geringfügig zu groß berechneten Temperaturen festzustellen. Ursache hierfür sind in erster Linie die zu groß abgeschätzten Wärmeübergangszahlen auf der Radscheibenvorderseite. Wegen der im Laufradkanal größeren Grenzschichtdicke im Vergleich zu der in der Rechnung vorausgesetzten Plattenumströmung ergeben sich bei der Kanalströmung in Radiallaufrädern geringere Wärmeübergangszahlen.

Eine ebenfalls relativ ungenaue Erfassung der realen Verhältnisse spiegelt sich in den Temperaturunterschieden zwischen Messung und Rechnung im Bereich der Einlaufkappe wider. Im vorderen Bereich der Einlaufkappe deuten die positiven Temperaturdifferenzen wegen der dort höheren Körpertemperatur im Vergleich zur Temperatur des umströmenden Fluids auf zu gering abgeschätzte Wärmeübergangszahlen hin.

Insgesamt kann allerdings festgestellt werden, daß die gemessene Temperaturverteilung durch die Rechnung trotz der Vereinfachungen bei der Bestimmung der Wärmeübergangszahlen genügend genau wiedergegeben wird, um im Rahmen der Festigkeitsanalyse den Einfluß der ungleichförmigen Temperaturverteilung auf die Spannungen und Dehnungen zu ermitteln. Diese Aussage wird durch zusätzlich durchgeführte Rechnungen und Messungen für den Teillast- und Überlastpunkt der Laufradkennlinie unterstützt. Diese Temperaturverteilungen verlaufen tendenziell ähnlich wie die für den Kennlinienbestpunkt vorgestellten, wobei die Laufradaustrittstemperaturen bei dem Teillastpunkt ca. 0,5 K geringer und bei dem Überlastpunkt ca. 0,5 K größer als die Temperaturen des Bestpunktes sind. Auf der Einlaufkappe unterscheiden sich die Temperaturen dagegen nicht. Die Unterschiede zwischen

Messung und Rechnung verlaufen bei den vom Bestpunkt abweichenden Kennlinienpunkten in der gleichen Größenordnung wie diejenigen des Bestpunktes, so daß hier auf eine Darstellung dieser Ergebnisse verzichtet werden kann.

5. Festigkeitsanalyse von zwei Radiallaufrädern unter Fliehkraftbelastung, ungleichförmiger Temperaturverteilung und Nabenvorspannung

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Festigkeitsrechnung von zwei Radiallaufrädern einmal ohne und einmal mit Deckscheibe dargestellt, wobei neben der Fliehkraft die Einflüsse einer ungleichförmigen Temperaturverteilung und einer Nabenvorspannung auf das Spannungs- und Dehnungsverhalten der Laufräder berücksichtigt sind.

Die Geometrie des halboffenen Laufrades ist weitgehend mit der des Versuchslaufrades identisch. Um die Ergebnisse auf andere bauübliche Laufradbauformen übertragen zu können, ist lediglich die Geometrie der Radscheibe bei gleicher Dickenverteilung dahingehend geändert worden, daß die Radscheibe auf der beschauften Seite eben verläuft, womit die Kontur der Schaufelköpfe nunmehr geneigt ausgeführt ist. Der radiale Verlauf des Strömungskanalquerschnittes ist dagegen unverändert geblieben, so daß die Ergebnisse der Geschwindigkeitsmessungen zugrunde gelegt werden können.

Das geschlossene Laufrad entspricht im Konturverlauf von Nabe, Radscheibe und Schaufeln dem halboffenen Laufrad. Die Hauptabmessungen der Laufräder im Meridianschnitt sind in Bild 5.01 dargestellt. Die dreidimensionalen Finite-Element-Strukturen zeigt Bild 5.02.

Als Betriebsdaten sind der Rechnung für beide Laufräder folgende Werte zugrunde gelegt:

- Laufraddrehzahl $N = 13200 \text{ min}^{-1}$ entsprechend einer Umfangsgeschwindigkeit $u_2 = 235 \text{ m/s}$,
- Laufradwerkstoff Aluminium mit einer Dichte $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$, und einem Elastizitätsmodul $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$,
- das Übermaß der Schrumpfung im kalten, nicht eingebauten Zustand der Laufräder beträgt $3 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$. Die Laufräder sind auf einer Stahlwelle aufgeschumpft.

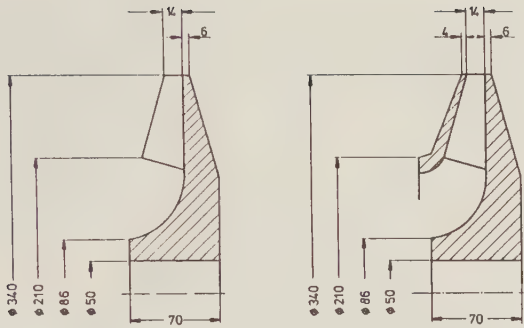


Bild 5.01: Hauptabmessungen der untersuchten Laufräder

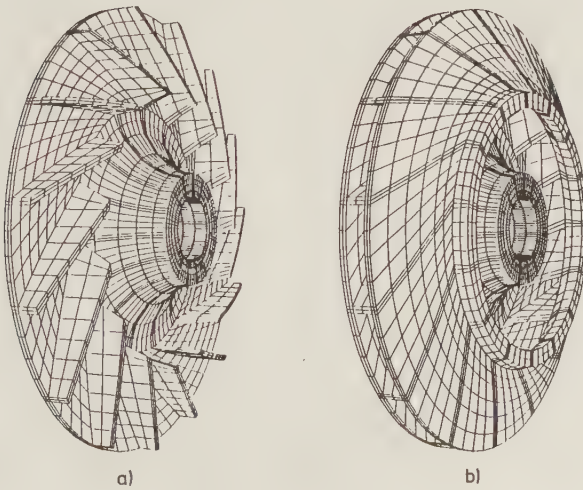


Bild 5.02: Finite-Element-Strukturen der untersuchten Laufräder

- a) ohne Deckscheibe
- b) mit Deckscheibe

Da sich das Schrumpfmaß bei unterschiedlichen Betriebszuständen der Laufräder ändert, kann dieses nicht einfach in Form einer inhomogenen Randbedingung berücksichtigt werden (Anhang Al.9), sondern es wird die Elastizität der Welle mit Hilfe eines analytischen Lösungsabsatzes beschrieben und in der Steifigkeitsmatrix der Laufräder berücksichtigt.

Um zu praxisnahen Aussagen über den Temperatureinfluß auf den Spannungs- und Dehnungszustand zu gelangen, wird hier von einem geschlossenen Einbau der Laufräder in ein Verdichtergehäuse ausgegangen im Gegensatz zu den für das Versuchslaufrad vorliegenden Bedingungen mit einem nach hinten offenen Gehäuse. Diese Voraussetzung hat eine größere statische Temperatur in der laufradrückseitigen Radkammer zur Folge, da nunmehr die am Laufradumfang austretenden Leckmassenströme nicht unmittelbar ins Freie entweichen können, sondern die Radkammer zusätzlich erwärmen. Den Rechnungen ist eine statische Temperatur in der Radkammer von 50°C zugrunde gelegt. Diese Voraussetzung gilt bei dem geschlossenen Laufrad für die Deckscheibenvorderseite in entsprechender Weise.

Darüber hinaus liegen der berechneten Laufradtemperaturverteilung folgende mit dem Versuchslaufrad übereinstimmende Daten zugrunde:

- | | | |
|---|-------------|------------------------------|
| - Volumenstrom am Laufradeintritt | $\dot{V}_1$ | = $1,2 \text{ m}^3/\text{s}$ |
| - Temperatur am Laufradeintritt | T_1 | = 21°C |
| - Druck am Laufradeintritt | P_1 | = 1 bar |
| - Laufradverdichtungsverhältnis | P_2/P_1 | = 1,3 |
| - Geschwindigkeitsverteilung im Laufrad wie im Versuchslaufrad gemessen (Abschnitt 4.3.2) | | |

Die unter diesen Voraussetzungen berechneten Temperaturverteilungen der Laufräder sind in den Bildern 5.03 bis 5.05 dargestellt. Das geschlossene Laufrad ist einmal mit Deckscheibe (Bild 5.04) und einmal ohne Deckscheibe (Bild 5.05) abgebildet.

LINIEN KONstanTER TEMPERATUR		
0	35.93	°C
1	37.86	°C
2	39.79	°C
3	41.72	°C
4	43.65	°C
5	45.58	°C
6	47.51	°C
7	49.44	°C
8	51.37	°C
9	53.30	°C

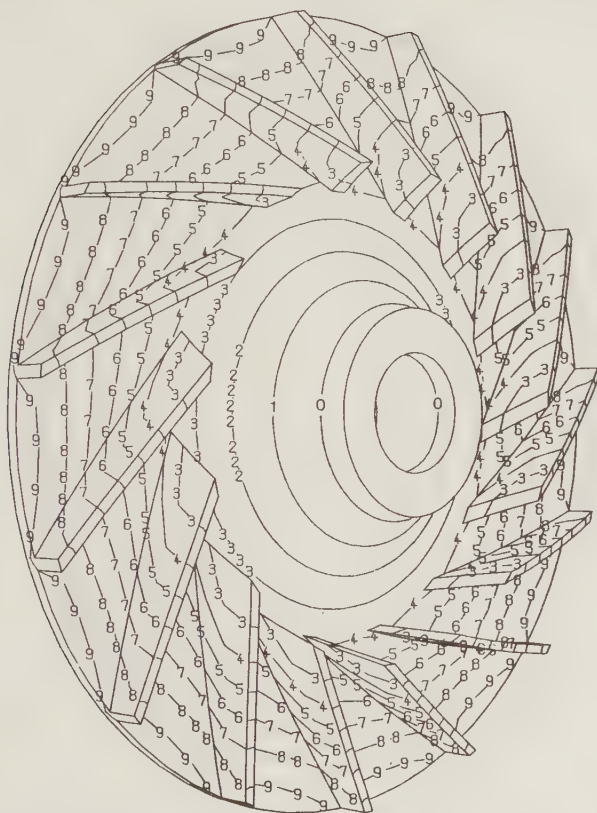


Bild 5.03: Berechnete Temperaturverteilung auf der Oberfläche des halboffenen Laufrades zur Berücksichtigung der Temperaturspannungen

LINIEN KONstanTER TEMPERATUR		
0	:	39.61 °C
1	:	41.38 °C
2	:	43.15 °C
3	:	44.91 °C
4	:	46.68 °C
5	:	48.44 °C
6	:	50.21 °C
7	:	51.98 °C
8	:	53.74 °C
9	:	55.51 °C

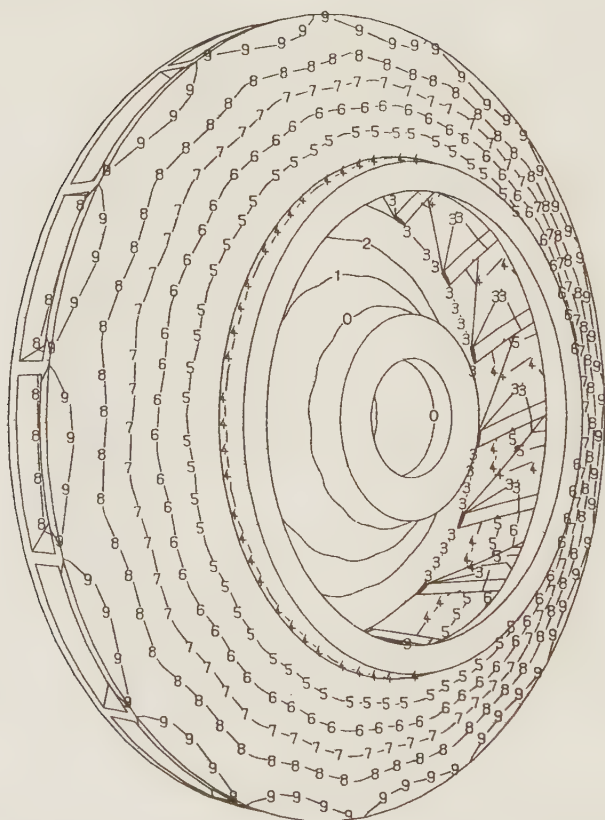


Bild 5.04: Berechnete Temperaturverteilung auf der Oberfläche des geschlossenen Laufrades zur Berücksichtigung der Temperaturspannungen

LINIEN KONstanTER TEMPERATUR		
0	39.61	°C
1	41.38	°C
2	43.15	°C
3	44.91	°C
4	46.68	°C
5	48.44	°C
6	50.21	°C
7	51.98	°C
8	53.74	°C
9	55.51	°C

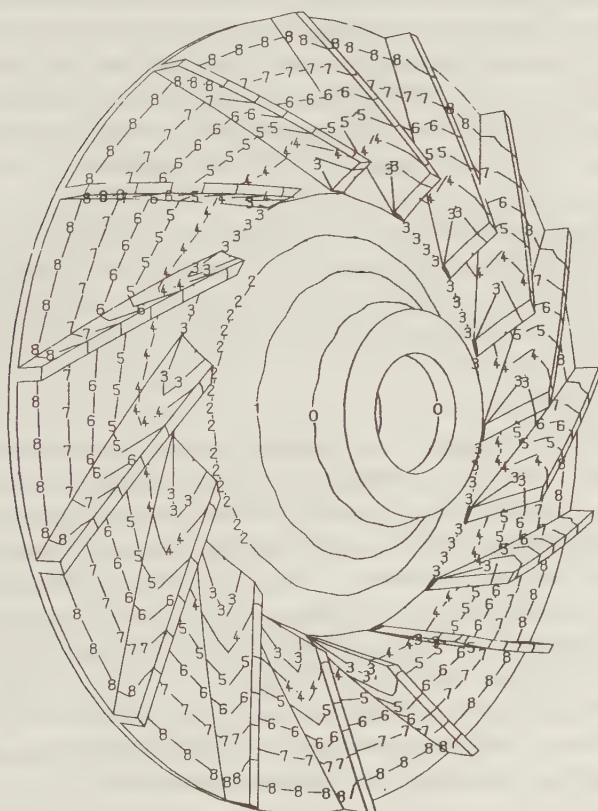


Bild 5.05: Berechnete Temperaturverteilung auf der Oberfläche des geschlossenen Laufrolles zur Berücksichtigung der Temperaturspannungen, Laufrolle ohne Deckscheibe dargestellt

Aufgrund der im Vergleich zum Versuchslaufrad höheren statischen Temperatur in der Radkammer unterscheiden sich die dargestellten Temperaturverläufe von den Verteilungen des Versuchslaufrades deutlich (Abschnitt 4.4). Die Temperaturverteilung ist für beide Laufräder im Austrittsbereich nicht rotationssymmetrisch, was auf die Unterschiede der Totaltemperaturen in den Radkammern und in den Strömungskanälen zurückzuführen ist. Das Temperaturniveau der Rad- und Deckscheibe wird in erster Linie durch den Wärmeübergang in den Radkammern aufgrund der Radseitenreibung bestimmt. Die totalen Fluidtemperaturen in den Strömungskanälen sind durchweg geringer als die Totaltemperaturen in den Radkammern auf gleichem Radius. Diese Tatsache wird insbesondere bei dem halb-offenen Laufrad durch das axiale Temperaturprofil der Schaufeln verdeutlicht. Die Schaufelvorderkante hat im gesamten Strömungskanal geringere Temperaturen als der jeweilige Schaufelfuß auf gleichem Radius, was bedeutet, daß die Schaufel der Radscheibe Wärme entzieht und an das Fluid im Strömungskanal abgibt.

Das Laufrad mit Deckscheibe besitzt bei ähnlicher Temperaturverteilung in Umfangsrichtung das insgesamt höhere Temperaturniveau. Dies ist dem Einfluß der Deckscheibe zuzuschreiben, deren thermodynamische Randbedingungen auf der Vorderseite denjenigen der Radscheibenrückseite entsprechen. Wegen der fehlenden Koppelung der Deckscheibe an kältere Laufradbereiche, wie dies bei der Radscheibe durch die Ankoppelung an die Nabe der Fall ist, besitzt die Deckscheibe auf gleichem Radius höhere Temperaturen als die Radscheibe. Dies hat ein insgesamt höheres Temperaturniveau des Laufrades mit Deckscheibe im Vergleich zum Laufrad ohne Deckscheibe zur Folge.

Die berechneten Spannungen und Dehnungen der Laufräder werden im folgenden für verschiedene Lastfälle näher untersucht.

5.1 Rechenergebnisse eines halboffenen Laufrades

Um den Einfluß der jeweiligen Belastung auf das Verformungsverhalten des Laufrades beurteilen zu können, sind in den Bildern 5.06 bis 5.08 die Laufradverformungen durch überhöhte Darstellung separat aufgrund Fliehkraft, Nabenvorspannung und Temperaturdehnung wiedergegeben. Die in Bild 5.06 gezeigten Verformungen des Laufrades aufgrund der Fliehkraft sind in Abschnitt 6 für ein bauähnliches Laufrad diskutiert und dienen in diesem Zusammenhang zum Vergleich der Verformungen, die durch die Nabenvorspannung und die ungleichförmige Temperaturverteilung verursacht werden.

Die Verformungen des stillstehenden, nicht erwärmten Laufrades unter der Nabenvorspannung zeigt Bild 5.07. Es ist zu erkennen, daß sich die Maximaldehnungen in der Nabenbohrung mit zunehmendem Radius relativ schnell abbauen. Der vordere Teil der Nabe erfährt geringfügig größere Verformungen als der hintere Teil, welcher wegen der sich anschließenden Radscheibe eine größere Steifigkeit gegenüber der radialen Belastung aufweist. Das in der Rechnung zugrunde gelegte Schrumpfmaß der Welle von 3 ‰ ergibt für den Nabendurchmesser des Laufrades im nicht eingebauten Zustand ein effektives Übermaß von 0,150 mm. Dieses wird durch die Elastizität der Welle im eingebauten Zustand auf 0,116 mm reduziert.

Die temperaturbedingten Verformungen sind in Bild 5.08 dargestellt. Es ist die Temperaturverteilung entsprechend Bild 5.03 berücksichtigt.

Die Temperaturverteilung hat eine relativ deutliche Dehnung der äußeren Laufradbereiche zur Folge. Insbesondere erreicht die Radialverformung am Laufradaustritt mit $\Delta r = 0,1$ mm eine ähnliche Größenordnung wie die fliehkraftbedingte Verformung in diesem Bereich (Bild 5.06). Die Schaufelvorderkante verschiebt sich um ca. 0,06 mm nach vorn, was zusammen mit der fliehkraftbedingten Axialverformung der Schaufelspitze am

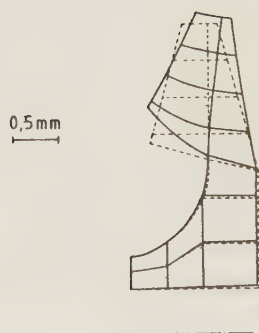


Bild 5.06: Überhöht dargestellte Verformungen eines halb-offenen Laufrades aufgrund der Fliehkraft im Schnitt A-A

---- unverformt, — verformt

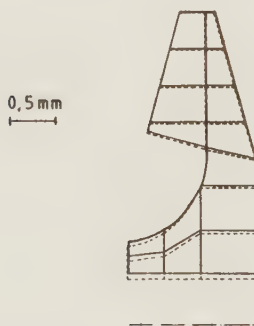


Bild 5.07: Überhöht dargestellte Verformungen eines halb-offenen Laufrades aufgrund einer Nabenvorspannung im Schnitt A-A

---- unverformt, — verformt

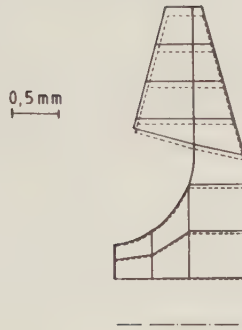


Bild 5.08: Überhöht dargestellte Verformungen eines halb-offenen Laufrades aufgrund ungleichförmiger Temperaturverteilung im Schnitt A-A
 ---- unverformt, — verformt

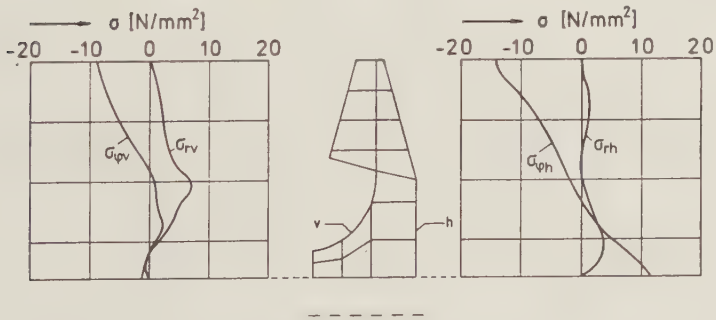


Bild 5.09: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_φ eines halboffenen Laufrades auf den Oberflächen der Radscheibe aufgrund des Temperatureinflusses
 v = vorn, h = hinten

Eintritt eine zusätzliche Verringerung des Spaltes zwischen Schaufel und Deckscheibe ergibt und damit die Betriebssicherheit gefährden kann.

Bild 5.09 zeigt die Verteilung der Temperaturspannungen im Schnitt A-A. Diesen Spannungsverläufen liegt die in Bild 5.03 wiedergegebene Temperaturverteilung zugrunde.

Aus den Verläufen der Radialspannungen auf der Radscheiben-vorderseite und der Rückseite wird mit dem relativen Spannungsmaximum auf der Vorderseite und dem relativen Minimum auf der Rückseite im Bereich des Schaufelanfanges ein Biegemomenteinfluß deutlich. Dieser resultiert aus dem versteifenden Einfluß der Schaufel auf die Radscheibe sowie aus dem geneigten Konturverlauf der Radscheibe. Diese kann sich nicht auf ihrer gesamten Erstreckung entsprechend der örtlichen Temperaturverteilungen verformen, sondern nur dort, wo der Schaufeleinfluß nicht mehr wirksam ist. An dieser Stelle entsteht ein Biegemoment, das die radialen Spannungsextrema zur Folge hat.

Die Tangentialspannungen verlaufen auf der Radscheibenrückseite nahezu linear mit negativen Werten am Laufradaustritt und positiven Werten in der Nabenbohrung. Auf dem beschauften Teil der Radscheibe ist der Spannungsverlauf auf der Vorderseite demjenigen auf der Rückseite ähnlich.

Die negativen Tangentialspannungen am Laufradaustritt werden durch das Temperaturprofil in radialer Richtung verursacht. Wegen der zur Nabe hin abnehmenden Temperaturen wird die radiale Dehnung des Austritts entsprechend dem dort herrschenden Temperaturniveau verhindert, so daß Druckspannungen entstehen. Der umgekehrte Effekt verursacht die positiven Tangentialspannungen in der Nabe auf der Laufradrückseite. Auf der Vorderseite der Nabe wirkt sich dieser Effekt nicht aus, da die Koppelung an die Radscheibe in diesem Bereich nicht mehr wirksam ist.

Im folgenden werden die Verteilungen der Radial- und Tangentialspannung auf der Radscheibenvorderseite und der Radscheibenrückseite für drei verschiedene Betriebszustände des Laufrades erläutert. Bild 5.10 zeigt zunächst die Spannungsverläufe des aufgeschrumpften, stillstehenden Laufrades. In Bild 5.11 sind die Spannungsverläufe des nunmehr rotierenden Laufrades wiedergegeben, wobei in diesem Bild noch keine Temperaturverteilung berücksichtigt ist. Deren zusätzliche Auswirkung auf den Spannungszustand ist in Bild 5.12 dargestellt, in dem also alle drei Belastungen gleichzeitig berücksichtigt sind.

Der Schrumpfsitz hat relativ große Spannungen in der Nabenbohrung zur Folge, die sich mit zunehmendem Radius jedoch schnell abbauen. Bereits beim Übergang von der Nabe zur Radscheibe nehmen die Spannungen im Vergleich zur Nabenbohrung nur noch geringe Werte an. Die Radialspannungen in der Nabenbohrung, die unmittelbar durch die Flächenpressung der Welle erzeugt werden, nehmen von der Laufradvorderseite zur Laufradrückseite zu, was durch die größere Steifigkeit desjenigen

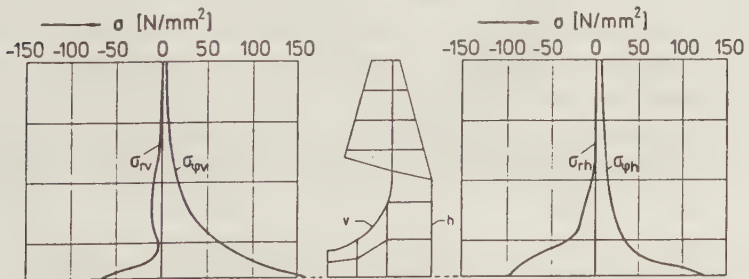


Bild 5.10: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_φ eines halboffenen Laufrades auf den Oberflächen der Radscheibe aufgrund einer Nabenvorspannung
v = vorn, h = hinten

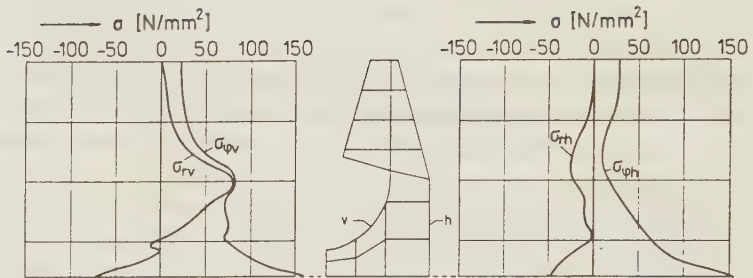


Bild 5.11: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines halboffenen Laufrades auf den Oberflächen der Radscheibe aufgrund einer Nabenvorspannung und der Fliehkraft
v = vorn, h = hinten

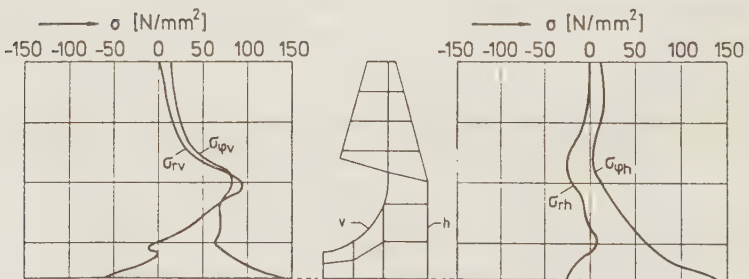


Bild 5.12: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines halboffenen Laufrades auf den Oberflächen der Radscheibe aufgrund einer Nabenvorspannung, der Fliehkraft und des Temperatureinflusses
v = vorn, h = hinten

Nabenteils erklärt wird, an welchen sich die Radscheibe anschließt. Die geringeren Radialspannungen der Nabenvorderseite im Vergleich zur Rückseite haben eine größere radiale Dehnung dieses Bereiches zur Folge. Aus diesem Grunde verlaufen die Tangentialspannungen in der Nabenbohrung mit umgekehrter Tendenz wie die Radialspannungen. Sie nehmen von vorn nach hinten ab.

Bei dem rotierenden, aufgeschrumpften Laufrad verändern sich die Spannungsverläufe durch den Fliehkrafteinfluß am deutlichsten auf der Radscheibe im Bereich des Schaufeleintritts (Bild 5.11). Dort nehmen die Spannungen tendenziell den gleichen Verlauf an, wie er in Abschnitt 6 für ein bauähnliches Laufrad dargestellt ist. Sowohl die Radial- wie auch die Tangentialspannungen besitzen relative Maxima bzw. Minima auf der Radscheibe im Bereich des Schaufeleintritts, die durch den Fliehkrafteinfluß der Schaufel hervorgerufen werden.

Die Veränderungen der Nabenspannungen durch die Fliehkraft sind auf der Vorderseite vernachlässigbar, nicht jedoch auf der Rückseite. Aufgrund der an dieser Seite über die Radscheibe stärker eingeleiteten Fliehkraftdehnungen vergrößern sich die Tangentialspannungen nur geringfügig, die Radialspannungen dagegen deutlich. Die Verringerung der Radialspannungen ist eine Folge der nunmehr größeren Eigendehnung des Laufrades durch die Fliehkraftbelastung und der demzufolge zurückgehenden Flächenpressung der sich aufweitenden, elastischen Welle.

Der Einfluß der zusätzlich berücksichtigten Temperaturverteilung wird durch Bild 5.12 verdeutlicht, in dem die Spannungsverläufe unter Berücksichtigung sämtlicher Belastungen dargestellt sind. Die Temperaturdehnungen verändern den Spannungsverlauf mit unterschiedlichen Tendenzen auf der Radscheibe und in der Nabenbohrung. Während sich insbesondere das Radialspannungsmaximum auf der Radscheibenvorderseite um ca. 12 % merklich vergrößert, verringern sich die Spannungen in

der Nabenbohrung sowohl auf der Vorder- als auch auf der Rückseite. Neben der wünschenswerten Verringerung der Tangentialspannungen, welche die maximale Belastung des Laufrades darstellen, verkleinern sich die Radialspannungen auf der Rückseite relativ deutlich um ca. 40 %. Dieser Tatsache ist besondere Beachtung zu widmen, da bei zu kleinen Druckspannungen zwischen Welle und Nabenbohrung die Zentrierung des Laufrades sowie gegebenenfalls die erforderliche Drehmomentenübertragung gefährdet sein können.

5.2 Rechenergebnisse eines geschlossenen Laufrades

Die sich durch die jeweiligen Belastungen einstellenden Verformungen des Laufrades mit Deckscheibe sind in den Bildern 5.13 bis 5.15 dargestellt.

Die fliehkraftbedingten Verformungen des Laufrades verlaufen tendenziell ähnlich wie diejenigen des bauähnlichen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, welches in Abschnitt 6.2 näher beschrieben ist. Im Vergleich zu diesem fallen bei dem in Bild 5.13 dargestellten Laufrad die deutlich geringeren Axialkomponenten der Verformung am Laufradaustritt sowie in der Wulst auf. Dieser Effekt wird in erster Linie durch die in Relation zum Laufradaustritt größere Radscheibendicke verursacht.

Für die Verformungen des Laufrades bei dem Schrumpfsitz gelten für die Radscheibe analoge Feststellungen, wie sie bereits für das halboffene Laufrad getroffen worden sind. Darüber hinaus wird durch Bild 5.14 verdeutlicht, daß die Nabendehnungen nahezu keine Verformungen der Deckscheibe verursachen.

Die temperaturbedingten Verformungen, denen die in Bild 5.04 wiedergegebene Temperaturverteilung zugrunde liegt, sind Bild 5.15 zu entnehmen.

Die ungleichförmige Temperaturverteilung hat neben einer Radialverformung des gesamten Laufrades mit zunehmenden Beträ-

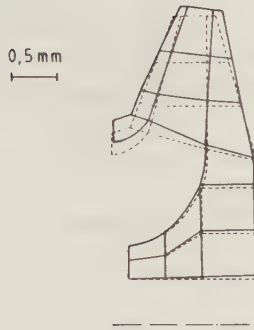


Bild 5.13: Überhöht dargestellte Verformungen eines geschlossenen Laufrades aufgrund der Fliehkraft im Schnitt A-A

---- unverformt, ——— verformt

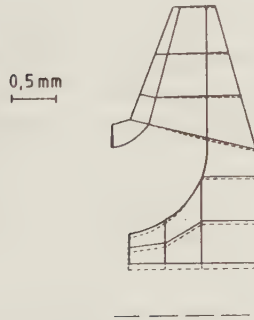


Bild 5.14: Überhöht dargestellte Verformungen eines geschlossenen Laufrades aufgrund einer Nabenvorspannung im Schnitt A-A

---- unverformt, ——— verformt

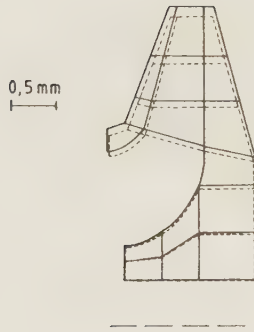


Bild 5.15: Überhöht dargestellte Verformungen eines geschlossenen Laufrades aufgrund einer ungleichförmigen Temperaturverteilung im Schnitt A-A
 ---- unverformt, ——— verformt

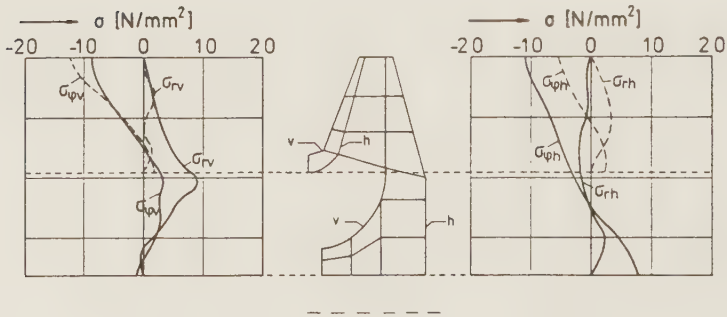


Bild 5.16: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_φ eines geschlossenen Laufrades auf den Oberflächen der Rad- und Deckscheibe aufgrund des Temperatureinflusses
 ——— Radscheibe, ---- Deckscheibe
 v = vorn, h = hinten

gen bei wachsendem Radius eine axiale Verlagerung der Deckscheibe nach vorn zur Folge.

Die temperaturbedingten Spannungsverläufe zeigt Bild 5.16. Die Spannungsverläufe auf der Deckscheibe sind gestrichelt dargestellt. Auf der Radscheibe des geschlossenen Laufrades sind die Radial- und Tangentialspannungsverläufe mit denen des halboffenen Laufrades nahezu identisch, was mit dem fast gleichen Temperaturprofil auf den Radscheiben beider Räder auch zu erwarten ist. Die Spannungen auf der Deckscheibe verlaufen tendenziell ähnlich wie die Spannungen auf der Radscheibe. Dies gilt insbesondere für die Tangentialspannungen, welche auf der Radscheibenvorderseite am Austritt die Maximalspannungen des Laufrades in Form von Druckspannungen darstellen. Infolge des Schaufeleinflusses sind am Laufradaustritt die Tangentialspannungen auf der Rückseite der Deckscheibe deutlich geringer als auf der Vorderseite.

Die nächsten drei Bilder zeigen die Spannungsverläufe des geschlossenen Laufrades bei den verschiedenen Lastzuständen. In den Bildern 5.17 bis 5.19 sind die Spannungen des zunächst stillstehenden, aufgeschrumpften Rades, dann die Spannungen des nunmehr rotierenden Rades ohne Berücksichtigung des Temperatureinflusses und anschließend die Spannungen unter zusätzlicher Berücksichtigung der ungleichförmigen Temperaturverteilung dargestellt.

Die in Bild 5.17 wiedergegebenen Schrumpfspannungen verlaufen auf der Radscheibe quantitativ nahezu identisch wie die Spannungen bei dem halboffenen Laufrad (Bild 5.10), so daß die für dieses Laufrad getroffenen Feststellungen für die Nabe und die Radscheibe auf das geschlossene Laufrad übertragen werden können. Daß die Auswirkungen der Schrumpfspannungen auf den Nabenbereich beschränkt bleiben, wird durch die Spannungsverläufe auf der Deckscheibe deutlich, die mit maximal 3 N/mm^2 vernachlässigbare Werte annehmen.

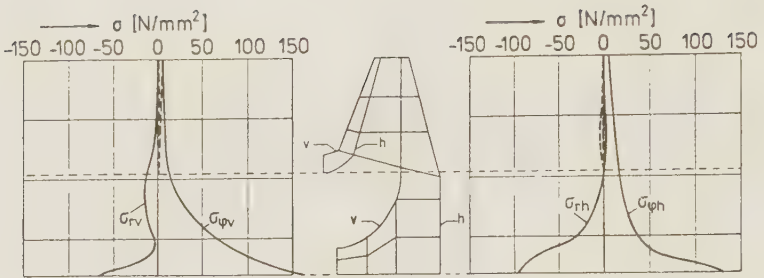


Bild 5.17: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines geschlossenen Laufrades auf den Oberflächen der Rad- und Deckscheibe aufgrund einer Nabenvorspannung
 — Radscheibe, ---- Deckscheibe
 v = vorn, h = hinten

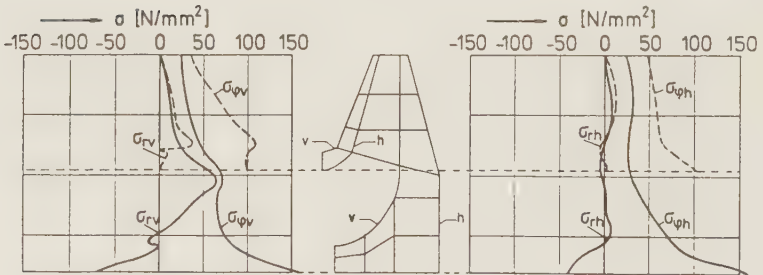


Bild 5.18: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines geschlossenen Laufrades auf den Oberflächen der Rad- und Deckscheibe aufgrund einer Nabenvorspannung und der Fliehkraft
 — Radscheibe, ---- Deckscheibe
 v = vorn, h = hinten

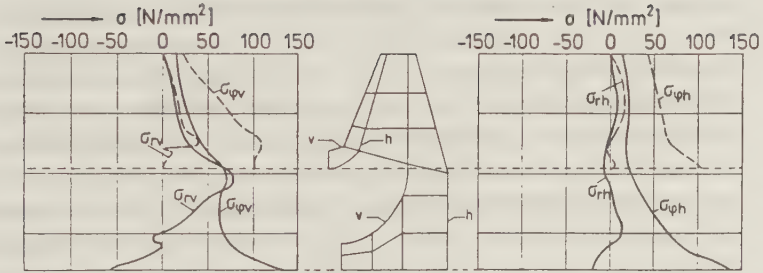


Bild 5.19: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines geschlossenen Laufrades auf den Oberflächen der Rad- und Deckscheibe aufgrund einer Nabenvorspannung, der Fliehkraft und des Temperatureinflusses
 — Radscheibe, ---- Deckscheibe
 v = vorn, h = hinten

Der Fliehkrafteinfluß verändert die Spannungen sowohl auf der Radscheibe wie auch auf der Deckscheibe deutlich (Bild 5.18). Die Ursachen für die fliehkraftbedingten Spannungsmaxima sind in Abschnitt 6 für ein bauähnliches Laufrad näher erläutert. Die deutlichsten Veränderungen der Schrumpfspannungen durch die Fliehkraft sind in der Nabenbohrung auf der Laufradrückseite zu beobachten. Da hier die fliehkraftbedingten Dehnungen über die Radscheibe unmittelbar in die Nabe eingeleitet werden, vergrößern sich die Tangentialspannungen durch die größere radiale Aufweitung und verringern sich die Radialspannungen infolge der kleineren Druckspannungen, die von der elastischen Welle auf die Laufradnabe ausgeübt werden.

Dieser Effekt verstärkt sich bei zusätzlich berücksichtigtem Temperatureinfluß, wie durch einen Vergleich der Bilder 5.18 und 5.19 erkennbar wird. Neben dem Rückgang der Schrumpfspan-

nungen auf der Rückseite der Nabenbohrung um ca. 50 % vergrößert sich das relative Maximum der Radialspannungen auf der Radscheibenvorderseite um ca. 20 %. Die Tangentialspannungen verringern sich sowohl in der Nabenbohrung als auch am Laufradaustritt am deutlichsten. Der Rückgang der Tangentialspannungen in der Nabenbohrung resultiert unmittelbar aus der temperaturbedingten Eigendehnung des Laufrades, durch die sich die Schrumpfspannungen reduzieren. Die Verminderung der Tangentialspannungen am Laufradaustritt, die sich sowohl auf der Rad- als auch auf der Deckscheibe bemerkbar macht, erklärt sich unmittelbar aus den negativen temperaturbedingten Tangentialspannungen in diesem Bereich, auf die in Bild 5.16 bereits hingewiesen worden ist.

6. Vergleichende Darstellung der Fliehkraftbeanspruchung von vier Radiallaufrädern unterschiedlicher Bauform

In diesem Abschnitt werden für vier Radiallaufräder unterschiedlicher Bauform die berechneten Verformungen und Spannungen vorgestellt und deren Verläufe vergleichend diskutiert. Es ist nur der Fliehkrafteinfluß berücksichtigt, da dieser Einfluß im Vergleich zu den Temperaturdehnungen die Hauptbelastung darstellt.

Darüber hinaus können die fliehkraftbedingten Spannungen auch durch die Formgebung des Laufradkanals beeinflußt werden, so daß sich aus einer Festigkeitsanalyse bereits in der Auslegungsphase Konsequenzen für die Geometrie eines Strömungskanals ergeben können.

Auf die Berücksichtigung von Nabendehnungen durch Schrumpfsitz wird in diesem Abschnitt verzichtet, da diese Belastung auf den Nabenbereich beschränkt bleibt und eine gegebenenfalls erforderliche Optimierung der Nabengeometrie nicht in jedem Fall einen Einfluß auf strömungsführende Laufradbereiche ausübt.

Um die Ergebnisse der einzelnen Laufräder untereinander vergleichen zu können, wird für alle Laufräder von gleichen Bedingungen ausgegangen. Der Austrittsdurchmesser aller Laufräder beträgt $D_2 = 400 \text{ mm}$. Es ist die Fliehkraftbelastung für eine Umfangsgeschwindigkeit $u_2 = 300 \text{ m/s}$ berücksichtigt. Als Laufradwerkstoff ist Aluminium mit einer Dichte $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$ zugrunde gelegt.

Hinweise zur Umrechnung der dargestellten Ergebnisse auf andere Bedingungen sind in Abschnitt 2.5 enthalten.

Die Finite-Element-Strukturen der Laufräder, deren fliehkraftbedingte Rechenergebnisse in diesem Abschnitt vorgestellt werden, sind in den Bildern 6.01 bis 6.04 abgebildet.

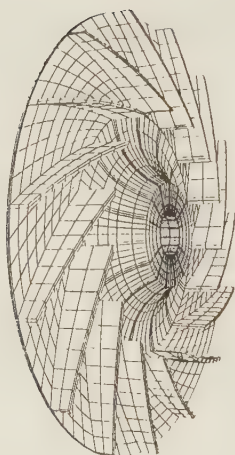


Bild 6.01: Mit finiten Elementen nachgebildetes halb-offenes Laufrad mit prismatischen Schaufeln

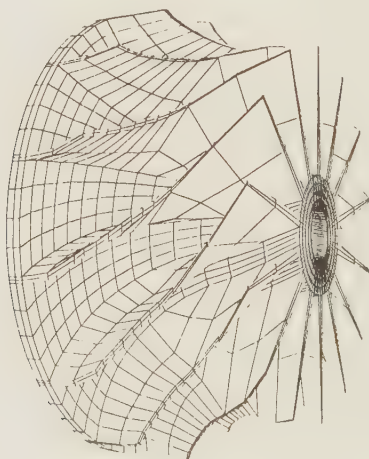


Bild 6.02: Mit finiten Elementen nachgebildetes halb-offenes Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln

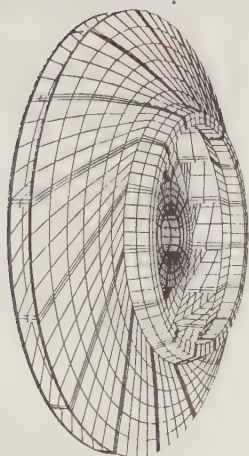


Bild 6.03: Mit finiten Elementen nachgebildetes
geschlossenes Laufrad mit prismatischen
Schaufeln

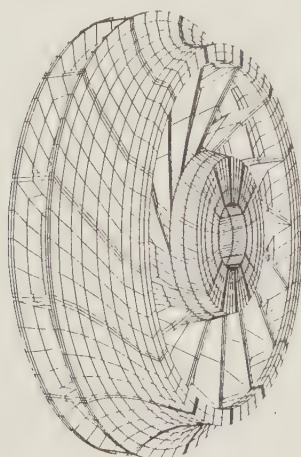


Bild 6.04: Mit finiten Elementen nachgebildetes
geschlossenes Laufrad mit räumlich
verwundenen Schaufeln

6.1 Rechenergebnisse zweier halboffener Laufräder

Die Hauptabmessungen der in diesem Abschnitt auf den Fliehkrafteinfluß untersuchten Laufräder sind in Bild 6.05 im Meridianschnitt dargestellt.

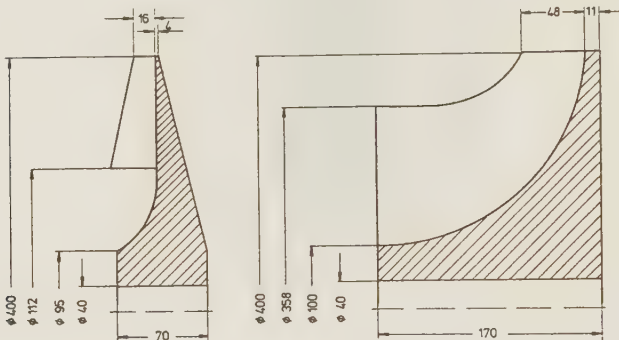


Bild 6.05: Hauptabmessungen der untersuchten halb-offenen Laufräder

6.1.1 Laufrad mit prismatischen Schaufeln

Die berechneten Verformungen des Laufrades mit prismatischen Schaufeln durch überhöhte Darstellung zeigt Bild 6.06. Die für den Schnitt A-A dargestellten Verformungen sind – mit einem konstanten Faktor vergrößert – der unverformten Geometrie überlagert. Der Schnitt A-A ist durch Bild 2.04 definiert.

Im Austrittsbereich verformt sich die Radscheibe relativ stark in axiale Richtung, was auf die Biegebelastung der Radscheibe durch die Schaufelfliehkraft zurückzuführen ist. Die ebenfalls erheblichen radialen Verformungen der Schaufelspitze im Eintritt ergeben sich aus dem flachen Winkel der Schaufel in Umfangsrichtung und der daraus resultierenden geringen Steifigkeit gegenüber radialer Belastung.

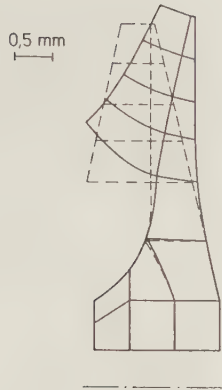


Bild 6.06: Überhöht dargestellte Verformungen eines halboffenen Laufrades aufgrund Fliehkraft-einfluß im Schnitt A-A

----- unverformt, ——— verformt

Die berechneten Radial- und Tangentialspannungsverläufe auf der Radscheibenvorderseite und -rückseite sind in Bild 6.07 für den Schnitt A-A dargestellt.

Die Spannungen zeigen einen Verlauf, der aus dem Verformungsverhalten des Laufrades zu erwarten ist. Besonders auffällig sind die relativen Maxima der Radial- und Tangentialspannungen im Bereich des Schaufeleintritts, die durch den Biegemomenteinfluß der Schaufeln hervorgerufen werden. Dieser Einfluß ist gleichzeitig für die Druckspannungen der Radscheibenrückseite auf dem entsprechenden Radius verantwortlich.

Einen Eindruck von der dreidimensionalen Spannungsverteilung auf der Laufradoberfläche sowie in der Radscheibe vermitteln die Bilder 6.08 bis 6.10, in welchen die Verläufe der Radial-, Tangential- und Vergleichsspannungen in Form von Isolinien für das aufgeschnittene Laufrad dargestellt sind.

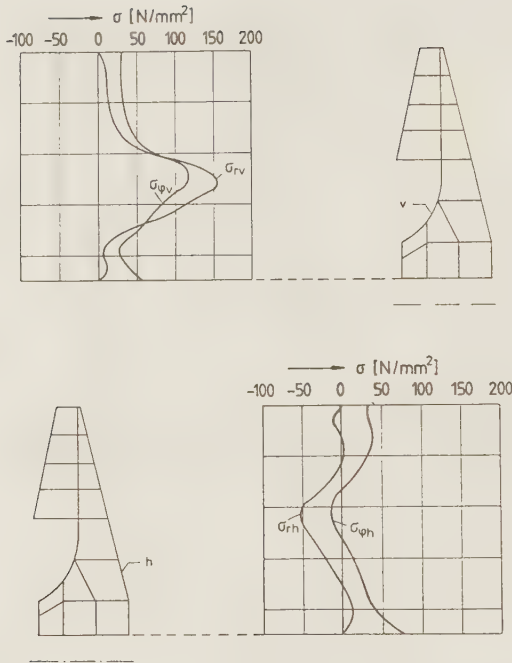


Bild 6.07: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines halboffenen Laufrades auf den Oberflächen der Radscheibe im Schnitt A-A
v = vorn, h = hinten

Neben der relativ hohen Biegebelastung der Radscheibe im Bereich des Schaufeleintritts weist die dreidimensionale Darstellung die Schaufel selbst als hoch belastetes Bauteil aus, was durch die hohen Vergleichsspannungen am Schaufeleintritt in Bild 6.10 verdeutlicht wird. Diese Belastung wird durch das Verformungsverhalten der Schaufel nach Bild 6.06 erklärt.

LINIEN KONstanTER RADIALSPANNUNG		
0	:	-38.07 N/MM ²
1	:	-10.94 N/MM ²
2	:	16.18 N/MM ²
3	:	43.30 N/MM ²
4	:	70.43 N/MM ²
5	:	97.55 N/MM ²
6	:	124.67 N/MM ²
7	:	151.80 N/MM ²

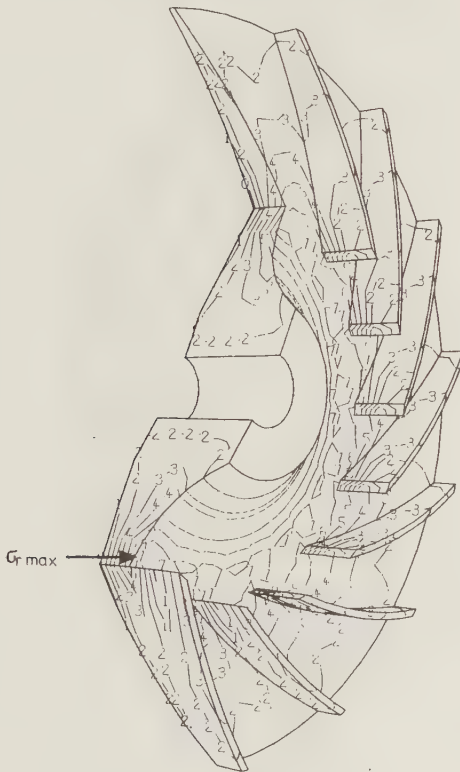


Bild 6.08: Linien konstanter Radialspannungen eines halboffenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

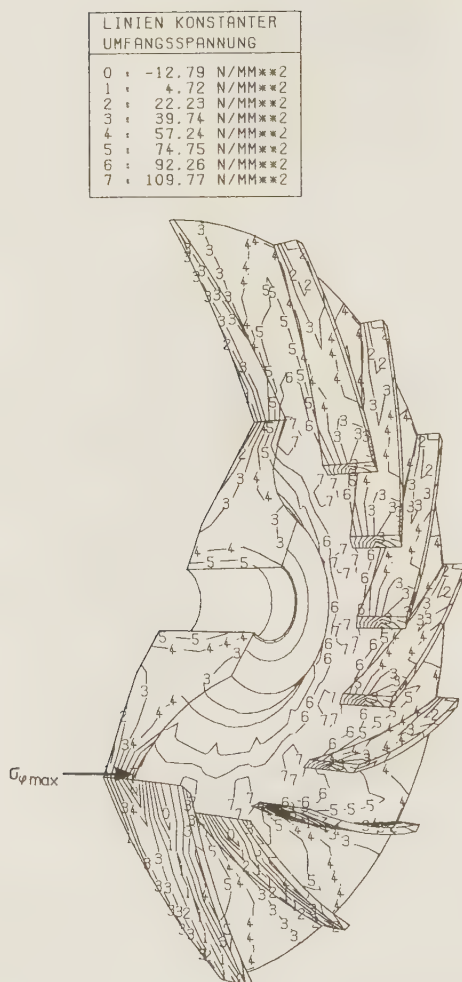


Bild 6.09: Linien konstanter Umfangsspannungen eines halboffenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

LINIEN KONstanTER VERGLEICHSSpanNUNG		
0	30.63	N/MM ²
1	51.91	N/MM ²
2	73.18	N/MM ²
3	94.46	N/MM ²
4	115.74	N/MM ²
5	137.01	N/MM ²
6	158.29	N/MM ²
7	179.57	N/MM ²

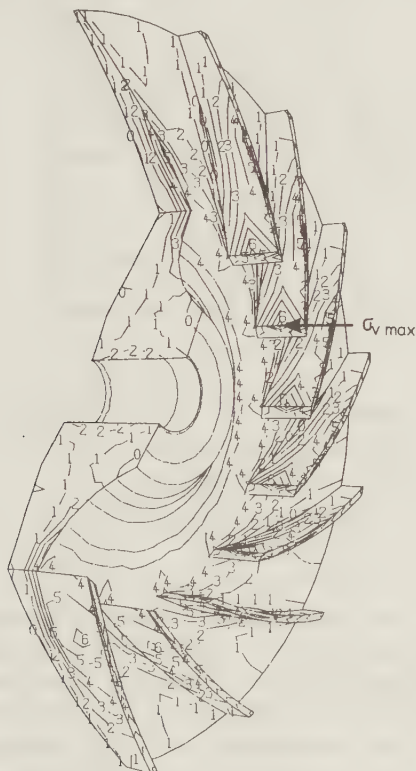


Bild 6.10: Linien konstanter Vergleichsspannungen eines halboffenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

6.1.2 Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln

Die Verformungen des schnellläufigen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln sind in Bild 6.11 durch überhöhte Darstellung wiedergegeben.

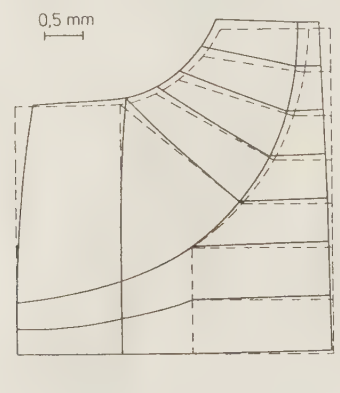


Bild 6.11: Überhöht dargestellte Verformungen eines halboffenen Laufrades aufgrund Fliehkrafteinfluß im Schnitt A-A
----- unverformt, ——— verformt

Das schnellläufige Laufrad zeigt im Vergleich zu dem Laufrad mit prismatischen Schaufeln ein insgesamt geringeres Verformungsniveau (Bild 6.06). Durch die größere Steifigkeit der Beschauelung, für die in erster Linie die in den Saugmund vorgezogene Schaufelpartie verantwortlich ist, wird ein Wegkippen des Radscheibenaustritts nach hinten verhindert. Das durch die Fliehkraft erzeugte Biegemoment der Schaufel im Austrittsbereich muß bei dieser schnellläufigen Bauform nicht von der Radscheibe aufgenommen werden, sondern wird durch die tragende Funktion des Schaufeleintritts kompensiert.

Durch die axiale Radscheibenverformung des schnellläufigen Laufrades im Austrittsbereich in Richtung Laufradeintritt wird die grundsätzliche Verformungstendenz der Radscheibe wiedergegeben, wie sie sich ohne den Schaufeleinfluß ergibt. Dieser Zusammenhang wird durch Bild 6.12 bestätigt, in welchem die Verformungen einer unbeschaufelten rotierenden Scheibe dargestellt sind.

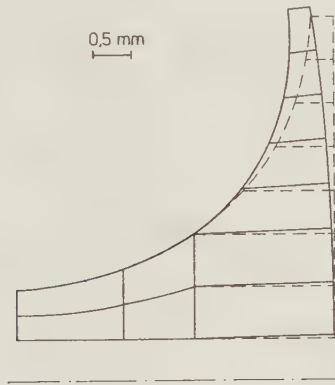


Bild 6.12: Überhöht dargestellte Verformungen einer
rotierenden unbeschaufelten Scheibe
----- unverformt, ——— verformt

Die Axialverformung am Radscheibenaustritt in Richtung der Vorderseite ist eine Folge des nicht radialsymmetrischen Konturenverlaufes der Radscheibe. Aufgrund der sich stetig verdickenden Vorderseite besitzt diese dort eine größere Steifigkeit gegenüber der Fliehkraftbelastung als die radial verlaufende Radscheibenrückseite, so daß sich auf der Vorderseite geringere Dehnungen ergeben.

Die Verläufe der Radial- und Tangentialspannungen des schnellläufigen Laufrades im Schnitt A-A sind in Bild 6.13 dargestellt.

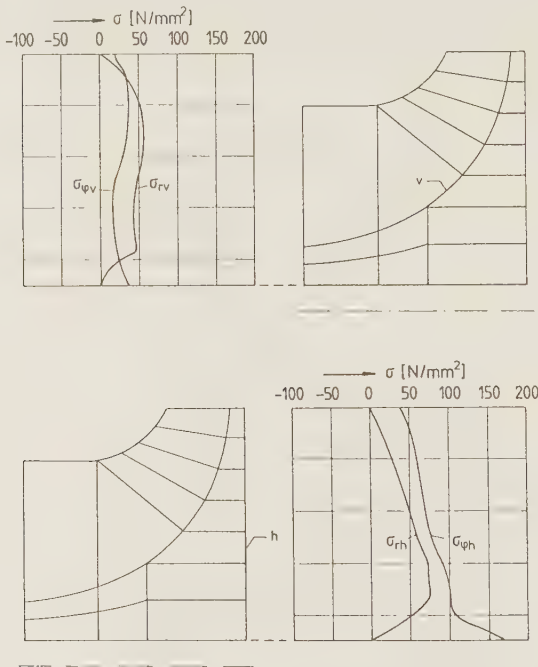


Bild 6.13: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ eines halboffenen Laufrades auf den Oberflächen der Radscheibe
v = vorn, h = hinten

Die dargestellten Spannungsverläufe zeigen für die Radscheibenrückseite einen für Rotationsschalen typischen Verlauf mit einem Radialspannungsmaximum in Scheibenmitte und mit zunehmenden Umfangsspannungen zur Nabe hin.

LINIEN KONstanTER RADIALSPANNUNG		
0	-27.26	N/MM ²
1	-13.21	N/MM ²
2	-8.84	N/MM ²
3	-4.89	N/MM ²
4	-2.94	N/MM ²
5	-1.99	N/MM ²
6	-1.04	N/MM ²
7	-0.09	N/MM ²

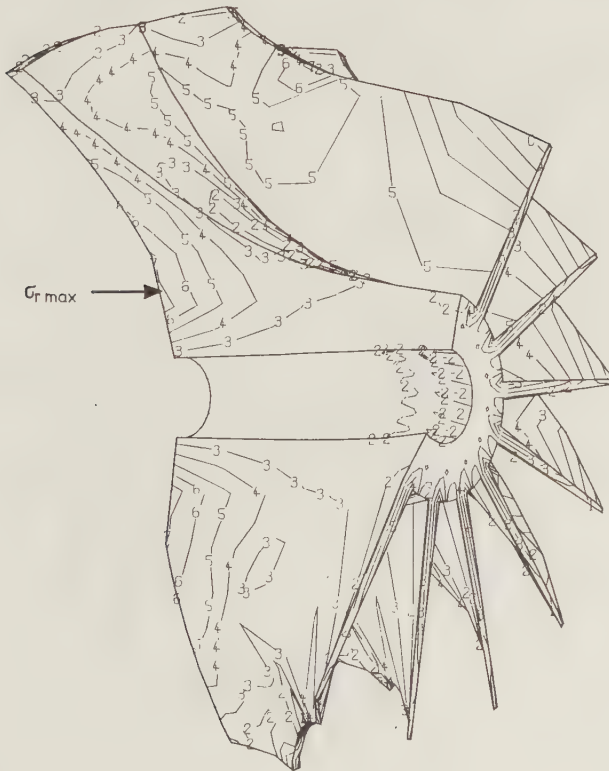


Bild 6.14: Linien konstanter Radialspannungen eines halboffenen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

LINIEN KONstanTER UMFANGSSpannung		
0	-1.50	N/MM**2
1	23.17	N/MM**2
2	47.85	N/MM**2
3	72.53	N/MM**2
4	97.20	N/MM**2
5	121.88	N/MM**2
6	146.55	N/MM**2
7	171.23	N/MM**2

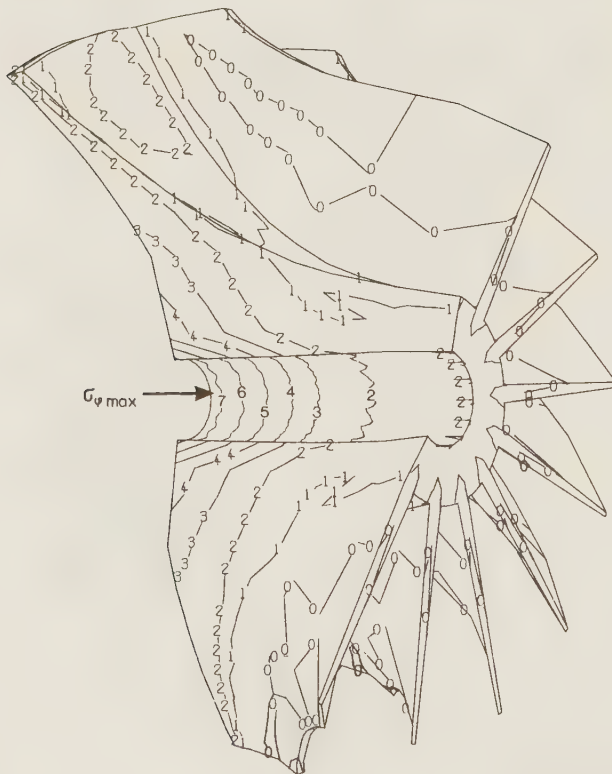


Bild 6.15: Linien konstanter Umfangsspannungen eines halboffenen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

LINIEN KONstanTER VERGLEICHSSpannung		
0	18.57	N/MM**2
1	39.30	N/MM**2
2	60.03	N/MM**2
3	80.76	N/MM**2
4	101.49	N/MM**2
5	122.22	N/MM**2
6	142.95	N/MM**2
7	163.68	N/MM**2

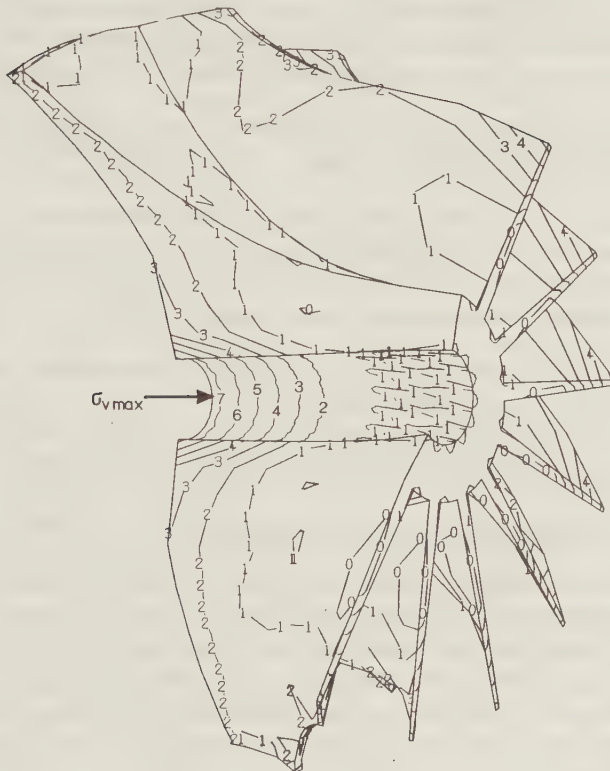


Bild 6.16: Linien konstanter Vergleichsspannungen eines halboffenen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

Auf der Radscheibenvorderseite sind diese Tendenzen aufgrund des dort stärker vorhandenen Schaufeleinflusses in weniger ausgeprägter Form vorhanden. Die Grenzen der mechanischen Belastung sind durch die Umfangsspannungen in der Nabe auf der Laufradrückseite vorgegeben. Wie in /11/ bereits dargelegt, lassen sich diese Spannungsspitzen durch eine Abwandlung des Konturenverlaufes der Radscheibenrückseite reduzieren, so daß diese Bauform im Gegensatz zu einem Laufrad mit prismatischen Schaufeln grundsätzlich für den Betrieb mit höheren Umfangsgeschwindigkeiten geeigneter ist.

Die dreidimensionalen Spannungsverteilungen können den Bildern 6.14 bis 6.16 entnommen werden.

Die dreidimensionalen Isolinienverläufe bestätigen die relativ homogene Werkstoffauslastung dieser Bauform, d.h., es treten keine von der Schnittdarstellung (Bild 6.13) stark abweichenden zusätzlichen Spannungsspitzen auf.

Sowohl die Isolinienverläufe der Umfangsspannungen wie auch die der Vergleichsspannungen weisen die hintere Nabenbohrung als maximal belasteten Laufradbereich aus. Die Schaufel wird durch die Fliehkraftbelastung nicht überbeansprucht.

6.2 Rechenergebnisse zweier geschlossener Laufräder

Die Hauptabmessungen der in diesem Abschnitt vorgestellten geschlossenen Laufräder sind Bild 6.17 zu entnehmen. Es handelt sich einmal um ein Laufrad mit prismatischen Schaufeln, dessen Radscheibenkontur mit derjenigen des halboffenen Laufrades aus Abschnitt 6.1.1 identisch ist. Das zweite Laufrad ist eine schnellläufige Bauform mit in den Saugmund vorgezogenen, räumlich verwundenen Schaufeln.

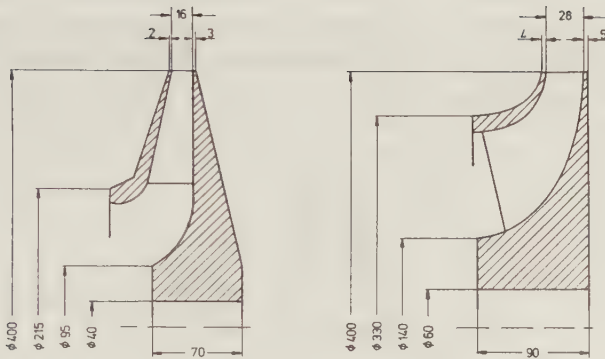


Bild 6.17: Hauptabmessungen der untersuchten geschlossenen Laufräder

6.2.1 Laufrad mit prismatischen Schaufeln

Die berechneten Verformungen des geschlossenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln zeigt in überhöhter Darstellung Bild 6.18.

Das Laufrad mit Deckscheibe zeigt im Vergleich zu der halboffenen Bauform (Bild 6.06) deutlich geringere Verformungen. Dies trifft besonders für den Bereich des Schaufeleintritts zu. Weil hier der Deckscheibe als rotierendem Ring eine tragende Funktion zukommt, verhindert sie die Verformung der Schaufelspitze. Die Axialverformung der Radscheibe am Laufradaustritt reduziert sich darüber hinaus im Vergleich zum halboffenen Laufrad. Aufgrund der homogenen Koppelung der Rad- und Deckscheibe über die Schaufeln besitzt dieser Bereich des Laufrades eine wesentlich größere Steifigkeit gegenüber einer Axialverformung.

Hierbei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Deckscheibe nun das am stärksten belastete Bauteil darstellt, weil sie neben ihrer eigenen Fliehkraftbelastung auch noch durch die Kräfte der sich nach hinten neigenden Radscheibe beansprucht wird. Diese Tatsache verdeutlicht Bild 6.19, in welchem die

Spannungsverläufe auf der Rad- und Deckscheibe dargestellt sind. Die Spannungen der Deckscheibe sind gestrichelt in das Diagramm eingetragen.

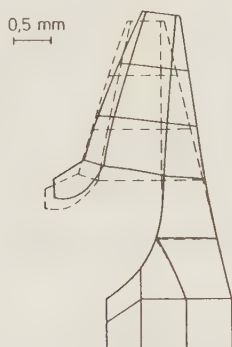


Bild 6.18: Überhöht dargestellte Verformungen eines geschlossenen Laufrades aufgrund Fliehkrafteinfluß im Schnitt A-A

----- unverformt, ————— verformt

Die Spannungen auf der Radscheibe zeigen tendenziell für das geschlossene Laufrad einen ähnlichen Verlauf wie für das halboffene, wobei hier allerdings ein insgesamt niedrigeres Spannungsniveau vorliegt. Besonders im Schaufeleintrittsbereich sind die relativen Extrema der Radialspannungen auf der Vorder- bzw. Rückseite der Radscheibe nicht so stark ausgeprägt. Insofern wird die Radscheibe durch die Deckscheibe entlastet. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß es im Bereich des Überganges zwischen Wulst und beschaukeltem Teil der Deckscheibe zu hohen Spannungsspitzen kommt. Deshalb ist die angesprochene Entlastung der Radscheibe nur begrenzt nutzbar. Die Ursache für die Tangentialspannungsspitzen in diesem Bereich ist durch die hohe radiale Dehnung der Wulst begründet, welche zu ihrer

eigenen Fliehkraftbelastung zusätzlich die Belastung der sich nach hinten neigenden Deckscheibe aufnehmen muß. Diese Belastung hat darüber hinaus erhöhte Biegespannungen zur Folge, die sich im Übergangsbereich Wulst-Deckscheibe durch ein Radialspannungsmaximum auf der Vorderseite und entsprechend negativen Radialspannungen auf der Rückseite äußern.

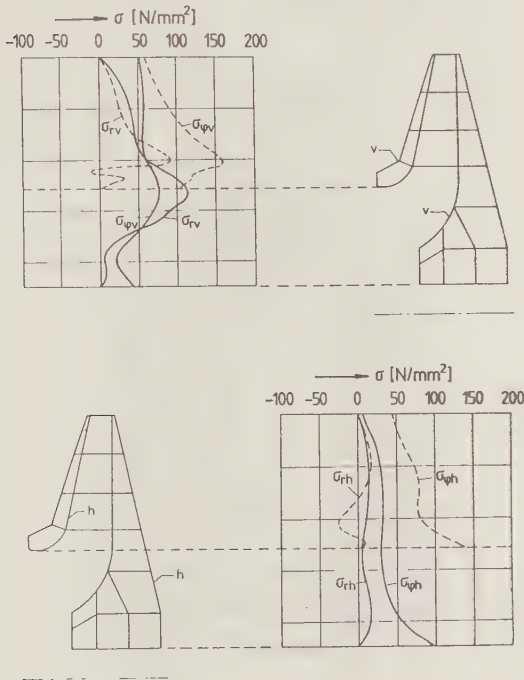


Bild 6.19: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_φ auf den Oberflächen der Rad- und Deckscheibe im Schnitt A-A
 — Radscheibe, ---- Deckscheibe
 v = vorn, h = hinten

LINIEN KONstanTER RADIALSPANNUNG	
0	-24.10 N/MM**2
1	-5.73 N/MM**2
2	12.63 N/MM**2
3	30.99 N/MM**2
4	49.36 N/MM**2
5	67.72 N/MM**2
6	86.09 N/MM**2
7	104.45 N/MM**2

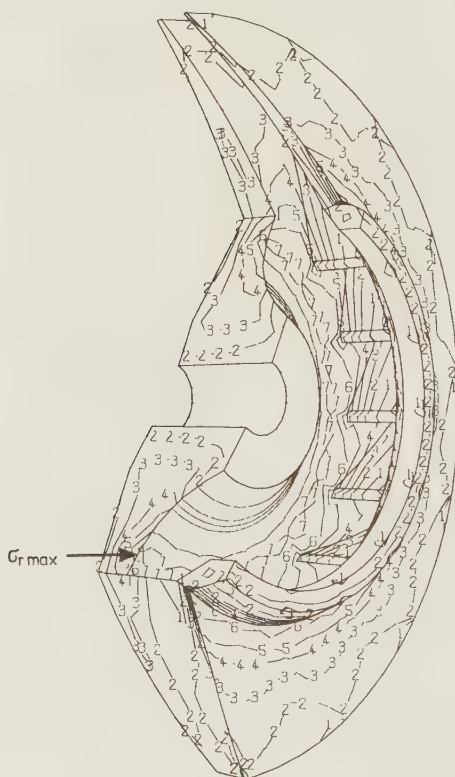


Bild 6.20: Linien konstanter Radialspannungen eines geschlossenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

LINIEN KONstanTER UMFANGSSpanNUNG	
0	1.26 N/MM**2
1	22.83 N/MM**2
2	44.41 N/MM**2
3	65.98 N/MM**2
4	87.56 N/MM**2
5	109.13 N/MM**2
6	130.71 N/MM**2
7	152.28 N/MM**2

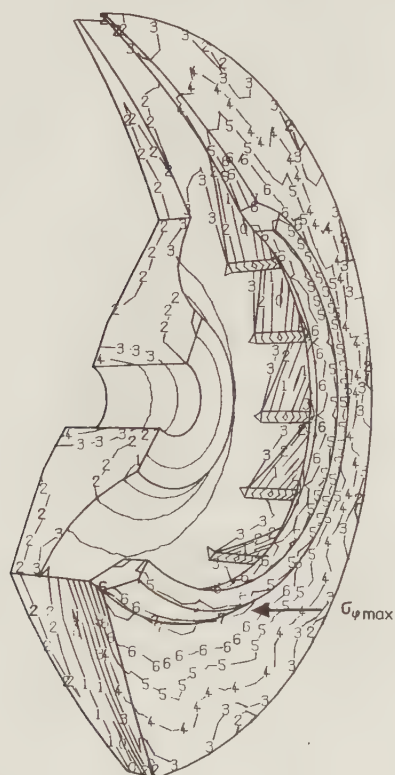


Bild 6.21: Linien konstanter Umfangsspannungen eines geschlossenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

LINIEN KONstanTER VERGLEICHSSpannung			
0	:	22.91	N/MM ²
1	:	40.98	N/MM ²
2	:	59.05	N/MM ²
3	:	77.11	N/MM ²
4	:	95.18	N/MM ²
5	:	113.25	N/MM ²
6	:	131.31	N/MM ²
7	:	149.38	N/MM ²

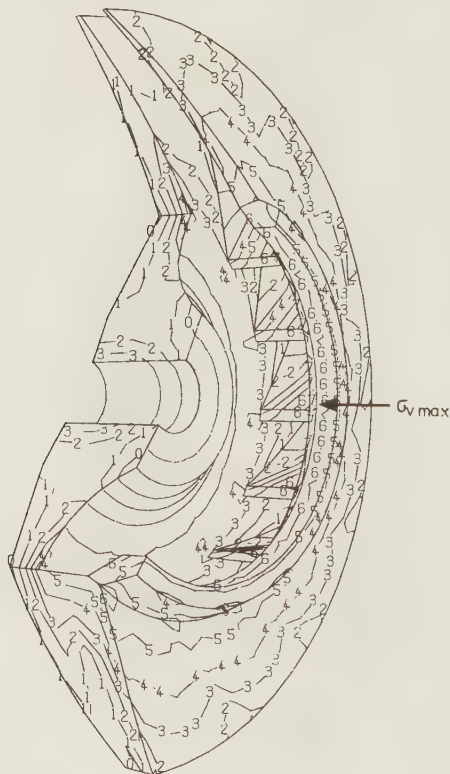


Bild 6.22: Linien konstanter Vergleichsspannungen eines geschlossenen Laufrades mit prismatischen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

Die dreidimensionale Spannungsverteilung des Laufrades, welche in den Bildern 6.20 bis 6.22 dargestellt ist, verdeutlicht anhand der Vergleichsspannungsverläufe, daß die Schaufelbelastung bei der Bauform mit Deckscheibe geringer ist als bei der Bauform ohne Deckscheibe. Hier tritt im Schaufel Eintrittsbereich keine vergleichbar große Biegebelastung auf. Die maximal beanspruchten Bereiche befinden sich in der Wulst, was sowohl durch die Vergleichsspannungen als auch durch die Umfangsspannungen bezeugt wird. Der Spannungsverlauf in der Wulst ist nahezu rotationssymmetrisch. Die maximalen Abweichungen von der Rotationssymmetrie zeigen sich besonders in der Deckscheibe am Laufradaustritt. Die Spannungsschwankungen werden in erster Linie von variierenden Umfangsspannungen hervorgerufen, deren Amplituden mit ca. 20 N/mm^2 aufgrund des dort ohnehin relativ geringen Spannungsniveaus keine große Bedeutung erlangen.

Diese Aussage darf allerdings nicht verallgemeinert werden, wie das im folgenden Abschnitt dargestellte Laufrad mit Deckscheibe und räumlich verwundenen Schaufeln belegt.

6.2.2 Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln

Die radialen und axialen Verformungen des Laufrades mit Deckscheibe im Meridianschnitt sind durch überhöhte Darstellung in Bild 6.23 wiedergegeben.

Im Vergleich zum Laufrad mit prismatischen Schaufeln fallen bei dieser Bauform die geringeren axialen Rad- und Deckscheibenverformungen im Austrittsbereich auf. Verantwortlich hierfür ist die in den Saugmund vorgezogene Schaufel, welche dem Laufrad eine bedeutend größere Steifigkeit gegenüber axialen Verformungen erteilt. Zusätzlich übt der Schaufel Eintrittsbereich eine tragende Funktion auf die Wulst und den Deckscheibenübergang aus, weil die radialen Verformungen dieser hoch belasteten Bereiche infolge ihrer Koppelung an die Laufradnabe reduziert werden. Dennoch sind aus Bild 6.23 die erheblich größeren Radialverformungen der Wulst dieser

Bauform im Vergleich zu der Bauform mit prismatischen Schaufeln (Bild 6.18) zu erkennen. Ursache hierfür ist der deutlich größere Saugmunddurchmesser der schnellläufigen Version und die daraus resultierende größere Fliehkraftbelastung.



Bild 6.23: Überhöht dargestellte Verformungen eines geschlossenen Laufrades aufgrund Fliehkrafteinfluß im Schnitt A-A
----- unverformt, ——— verformt

Die hohe Radialbelastung der Wulst wirkt sich darüber hinaus stärker auf die Nabenverformungen aus als dies bei dem Laufrad mit prismatischen Schaufeln der Fall ist, wie ein Vergleich der Nabenverformungen der beiden Laufräder zeigt. Während bei dem Laufrad mit prismatischen Schaufeln diese Verformungen so klein sind, daß diese bei dem gewählten Überhöhungsfaktor nicht mehr dargestellt werden können, ergeben sich bei dem schnellläufigen Laufrad deutliche Nabenverformungen besonders auf der Laufradrückseite, die auf die steifere Koppelung der äußeren Laufradbereiche mit der Nabe und den demzufolge stärker eingeleiteten Radialdehnungen zurückzuführen sind.

Die relativ hohe Belastung des Laufrades wird durch die Verläufe der Radial- und Tangentialspannungen verdeutlicht, welche in Bild 6.24 dargestellt sind.

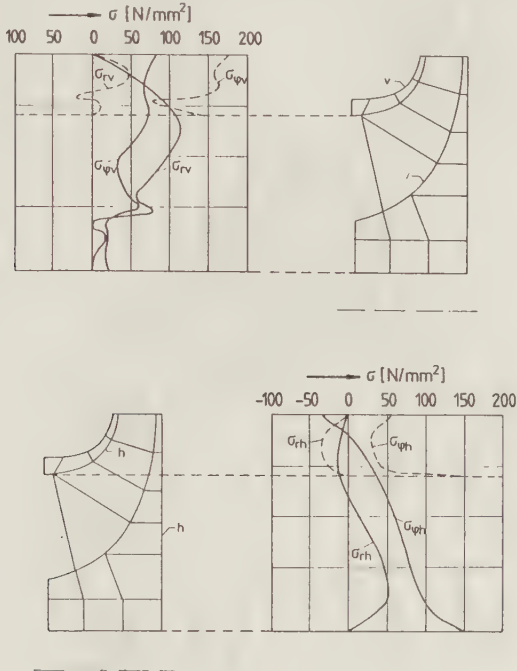


Bild 6.24: Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_ϕ auf den Oberflächen der Rad- und Deckscheibe im Schnitt A-A
 — Radscheibe, ---- Deckscheibe
 v = vorne, h = hinten

Die deutlichen Radialdehnungen sowohl der Nabe auf der Lauf-
 radrückseite als auch der Wulst haben Tangentialspannungs-
 maxima an den entsprechenden Stellen zur Folge. Die absolut
 größten Spannungen treten bei diesem Laufrad in der Deck-
 scheibenvorderseite am Austritt auf. Für den Verlauf der

LINIEN KONstanTER RADIALSPANNUNG		
0	:	-51.62 N/MM**2
1	:	-19.36 N/MM**2
2	:	12.90 N/MM**2
3	:	45.15 N/MM**2
4	:	77.41 N/MM**2
5	:	109.67 N/MM**2
6	:	141.92 N/MM**2
7	:	174.18 N/MM**2

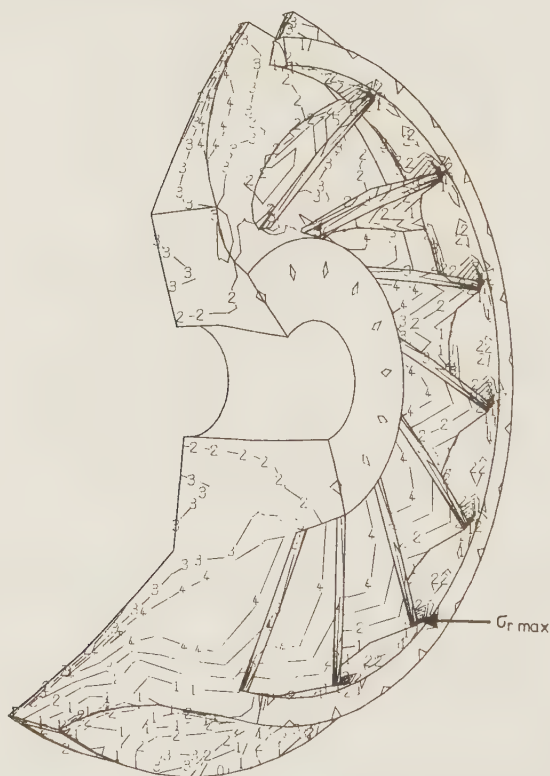


Bild 6.25: Linien konstanter Radialspannungen eines geschlossenen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

I. LINIEN KONstanTER UMFANGSSpannung	
0	-33.93 N/MM ²
1	-5.13 N/MM ²
2	23.67 N/MM ²
3	52.48 N/MM ²
4	81.28 N/MM ²
5	110.08 N/MM ²
6	138.88 N/MM ²
7	167.69 N/MM ²



Bild 6.26: Linien konstanter Umfangsspannungen eines geschlossenen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln, Laufrad geschnitten dargestellt

LINIEN KONstanTER VERGLEICHSSpannung		
0	:	20.37 N/MM**2
1	:	43.54 N/MM**2
2	:	66.72 N/MM**2
3	:	89.89 N/MM**2
4	:	113.07 N/MM**2
5	:	136.24 N/MM**2
6	:	159.42 N/MM**2
7	:	182.59 N/MM**2



Bild 6.27: Linien konstanter Vergleichsspannungen eines geschlossenen Laufes mit räumlich verwundenen Schaufeln, Laufes geschnitten dargestellt

Tangentialspannungen auf der Deckscheibenvorderseite, welcher von dem für Rotationsschalen typischen Verlauf vollkommen abweicht, sind ausgeprägt nichtrotationssymmetrische Effekte verantwortlich, die anhand der in den Bildern 6.25 bis 6.27 dargestellten dreidimensionalen Spannungsverteilungen deutlich ins Auge fallen.

Wie aus Bild 6.26 zu erkennen ist, kommt es bei den Tangentialspannungen im Austrittsbereich zu ausgeprägten Spannungsamplituden, wobei die Spannungsspitzen gleichzeitig die Maximalspannungen darstellen und somit die Grenze der Belastbarkeit des Laufrades festlegen. Neben der Größe der Tangentialspannungen wirkt sich der Ort ihres Auftretens zusätzlich ungünstig auf die maximale Belastbarkeit des Laufrades aus. Da die Spannungsspitzen in einem Randbereich auftreten, in welchem die Materialbeanspruchung bei plastischer Verformung nicht durch umliegende Bereiche kompensiert werden kann, ist ein Wegplatzen der Deckscheibe bei Überschreiten der Streckgrenze wahrscheinlich.

Die Ursache für die hohe Amplituden der Tangentialspannung liegt in einem durch die Schaufeln eingeleiteten Biegemoment in radialer Richtung, welches durch eine rotatorische Relativbewegung zwischen Rad- und Deckscheibe hervorgerufen wird. Diese Verdrehung der Deckscheibe relativ zur Radscheibe wird durch die nicht radial verlaufende Skelettfläche der in den Saugmund vorgezogenen Schaufeln bewirkt. Die größere radiale Dehnung der Deckscheibe im Vergleich zur Radscheibe im Eintrittsbereich führt zu einem Aufrichten der dort nicht achsnorm verlaufenden Schaufeln und somit zu einer Verdrehung der gesamten Deckscheibe. Die genannten Effekte werden durch Bild 6.28 verdeutlicht. Dort sind die Ansichten der beiden Laufräder mit Deckscheibe dargestellt. Obwohl aus Gründen der Anschauung der Vergrößerungsfaktor der Verformungen für das Laufrad mit prismatischen Schaufeln doppelt so groß gewählt ist wie für das Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln, fallen die extremen Abweichungen

von der Rotationssymmetrie bei dem verformten Laufrad mit räumlich verwundenen Schaufeln auf und erklären die hohen Amplituden der Umfangsspannungen im Austrittsbereich.

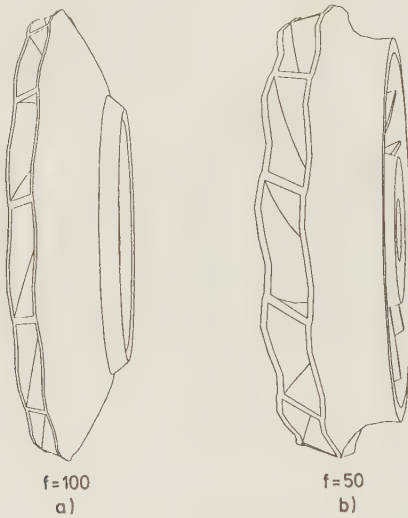


Bild 6.28: Mit Faktor f vergrößert dargestellte Verformungen zweier Laufräder mit Deckscheibe
a) prismatische Schaufeln
b) räumlich verwundene Schaufeln

7. Schwingungsanalyse von Radialverdichterschaufeln

Wie die in Abschnitt 6 dargestellten Rechenergebnisse der Fliehkraftspannungen eines schnellläufigen Laufrades mit räumlich verwundenen Schaufeln belegen, ist diese Bauform aufgrund ihrer relativ geringen statischen Belastung grundsätzlich für den Betrieb mit hohen Umfangsgeschwindigkeiten geeignet. Allerdings erfordert der hohe Massendurchsatz dieser Bauform relativ große Schaufelhöhen der in den Saugmund vorgezogenen Schaufelpartie, so daß die Betriebssicherheit des Laufrades durch Schaufelschwingungen in Frage gestellt sein kann. Aufgrund der besonderen Gefährdung schnellläufiger Radialräder erscheint es sinnvoll, diese Bauform auch auf ihr Schwingungsverhalten zu untersuchen und die dynamische Festigkeitsanalyse in diese Arbeit mit einzubeziehen.

Da die dynamische Festigkeitsanalyse um ein Vielfaches aufwendiger ist als die statische Festigkeitsanalyse vergleichbarer Geometrien, sind zur Realisierung entsprechender Rechnungen eine Reihe zusätzlicher Vereinbarungen zu treffen. Darüber hinaus kann bei der Berechnungen von Schaufelschwingungen nicht von vornherein eine periodische Rotationssymmetrie wie bei der statischen Festigkeitsanalyse vorausgesetzt werden, da einmal die Radscheibe als schwingungsfähiges Bauteil auf die Schwingungen der Schaufeln zurückwirkt und zusätzlich die Schaufeln infolge ihrer Koppelung an die Radscheibe eine gegenseitige Beeinflussung erfahren. Hieraus ergibt sich, daß die exakte dynamische Festigkeitsanalyse eines gesamten Laufrades aus Speicherplatz- und Rechenzeitgründen auch für Großrechenanlagen auf absehbare Zeit Schwierigkeiten bereiten wird.

Ein Ziel der Entwicklungsarbeiten kann einerseits darin gesehen werden, die aufwendige Struktur und die Anzahl der Freiheitsgrade durch eine Vergrößerung der Elemententeilung zu

reduzieren, wobei dann ständig zu überprüfen ist, ob die dynamischen Eigenschaften des Laufrades durch das Modell noch in ausreichender Weise nachgebildet werden /25, 26/.

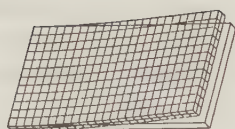
Andererseits kann eine Entkoppelung der einzelnen Schaufeln vorausgesetzt werden, so daß zur Schwingungsanalyse die Berechnung einer einzelnen Schaufel ausreicht. Diese Voraussetzung trifft zumindest für die kleinsten Schaufeleigenfrequenzen mit guter Näherung zu, wenn die Radscheibe eine größere Stärke als die Schaufeln besitzt und im Vergleich zu diesen als relativ starr angesehen werden kann. Daß mit solchen, auf nur einen Radscheibensektor beschränkten Rechnungen brauchbare Ergebnisse erzielt werden können, soll anhand eines Beispiels in Abschnitt 7.2 gezeigt werden. Dort werden die unter verschiedenen Voraussetzungen berechneten Eigenfrequenzen einer Schaufel mit Messungen verglichen.

7.1 Voraussetzungen für die Berechnung

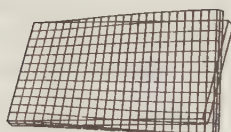
Die mathematischen Zusammenhänge zur Berechnung der Eigenwertgleichung sowie das verwendete Iterationsverfahren zur Berechnung der Eigenfrequenzen sind in Anhang 3 beschrieben.

Zur Berechnung des dynamischen Verhaltens einer Radialschaukel gelten im wesentlichen die bei der statischen Festigkeitsanalyse getroffenen Voraussetzungen, d.h., es wird rein elastisches, lineares Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Zur Geometrienachbildung werden die 20-Knoten Elemente der Serendipity-Klasse verwendet, so daß der vollständige dreiachsige Spannungszustand nachgebildet wird. Da hierdurch sowohl die Einflüsse von Schubspannungen als auch Querkontraktionseffekte berücksichtigt werden, liefert diese Vorgehensweise nicht nur relativ genaue Ergebnisse, sondern stellt auch sicher, daß sämtliche vorkommenden Eigenwerte unabhängig von dem Charakter ihrer Eigenform berechnet werden.

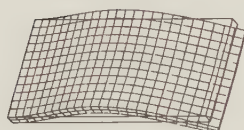
Zur Verdeutlichung werden die berechneten ersten zwölf klein-



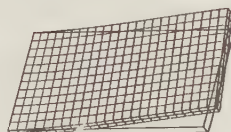
1. Eigenform



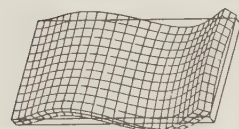
2. Eigenform



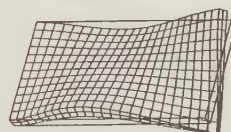
3. Eigenform



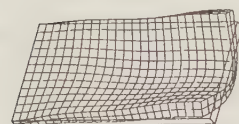
4. Eigenform



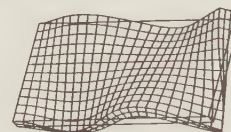
5. Eigenform



6. Eigenform



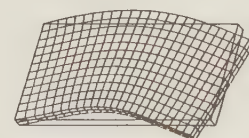
7. Eigenform



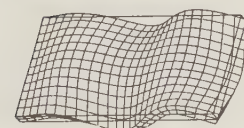
8. Eigenform



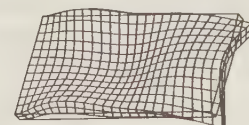
9. Eigenform



10. Eigenform



11. Eigenform



12. Eigenform

Bild 7.01: Überhöht dargestellte Eigenformen einer am linken Rand fest eingespannten Platte

sten Eigenformen einer einseitig fest eingespannten Platte in Bild 7.01 gezeigt und die berechneten sechs kleinsten Eigenfrequenzen in Tabelle 7.01 mit analytischen und gemessenen Ergebnissen nach /27/ verglichen.

Die Platte ist mit 72 Elementen nachgebildet worden. Das Verhältnis der Kantenlängen der Platte beträgt 20:10:1.

Eigenwerte	Eigenfrequenzen [Hz]		
	FE-Rechnung	Messung	analytisch
1	838	835	846
2	3509	3546	3638
3	5215	5094	5266
4	7047	÷	÷
5	11339	11453	11870
6	14411	14775	14987

Tabelle 7.01: Vergleich der Eigenfrequenzen einer einseitig fest eingespannten Platte aus der Finite-Element-Rechnung mit gemessenen und analytischen Ergebnissen nach /27/

Wie der Tabelle zu entnehmen ist, stimmen die Ergebnisse der Finite-Element-Rechnung mit den zum Vergleich angegebenen Zahlenwerten gut überein. Dabei ist festzustellen, daß mit Ausnahme des 3. Eigenwertes die Abweichungen der Finite-Element-Rechnung im Vergleich zu den Meßwerten geringer ausfallen als im Vergleich zu den analytisch berechneten Werten. Diese Tatsache läßt die grundsätzliche Überlegenheit der dreidimensionalen Finite-Element-Rechnung im Vergleich zur analytischen Lösung erkennen. Die Ursache liegt darin, daß letztere auf den vereinfachenden Annahmen und Voraussetzungen der Plattentheorie basiert /27/. Aus dem gleichen Grund ist in der Tabelle für den vierten Eigenwert keine analytische Lösung angegeben, da es sich bei diesem Eigenwert um eine Hochkantschwingung handelt.

Der Einfluß der Querkontraktion wird durch den 9. Eigenwert in Bild 7.01 verdeutlicht. Bei dem als entkoppelte Längsschwingung auftretenden Eigenwert ist eine zum Einspannquerschnitt zunehmende Einschnürung der Platte festzustellen, die aufgrund der vorausgesetzten festen Einspannung an der Einspannstelle wieder verschwindet.

7.2 Eigenwertrechnung einer Radialverdichterschaufel

Die im folgenden dargestellten Berechnungen sind für ein schnellläufiges Laufrad mit in den Saugmund vorgezogenen Schaufeln durchgeführt worden, dessen Hauptabmessungen in Bild 7.02 dargestellt sind. Die Schaufelstärke der räumlich verwundenen Schaufel beträgt mit Ausnahme einer leichten Anschärfung im Eintritt konstant $s = 4 \text{ mm}$. Wie aus dem Meridianschnitt zu erkennen ist, trifft wegen der relativ massiv ausgeführten Radscheibe die in der Rechnung vorausgesetzte Entkoppelung der einzelnen Schaufeln für dieses Rad mit guter Näherung zu.

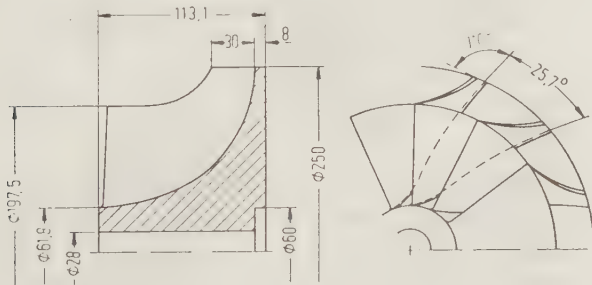


Bild 7.02: Hauptabmessungen des auf Schaufelschwingungen untersuchten Laufrades

Nachfolgend werden zunächst die Ergebnisse einer Rechnung vorgestellt, in welcher nur die Schaufel mit 16 Elementen nachgebildet ist. Die Radscheibe wird als vollkommen starr

vorausgesetzt, woraus für das Rechenmodell eine feste Einspannung der Schaufel an ihrer geschnittenen Verbindung zur Radscheibe resultiert. In einer zweiten Rechnung wird die biegeeweiche Einspannung der Schaufel dadurch berücksichtigt, daß ein Teil der Radscheibe als herausgeschnittener Laufradsektor mit in das Rechenmodell einbezogen ist. Bei dieser Rechnung, in der zur Geometrienachbildung 80 Elemente verwendet worden sind, werden die linken und rechten Schnittufer des Radscheibensektors als fest eingespannt vorausgesetzt. Der mit 80 Elementen nachgebildete Sektor ist in Bild 7.03 in dreidimensionaler Ansicht dargestellt.

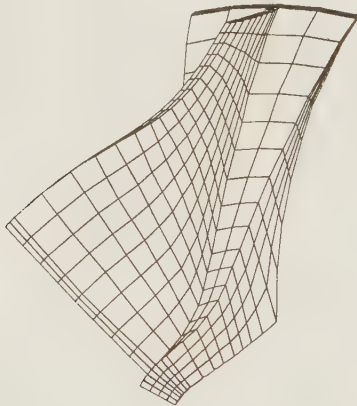
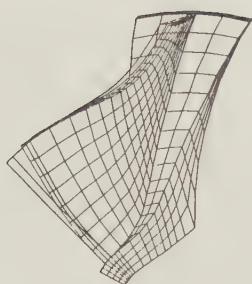
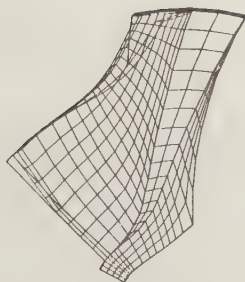


Bild 7.03: Finite-Element Struktur eines Sektors des auf Schaufelschwingungen untersuchten Laufrades

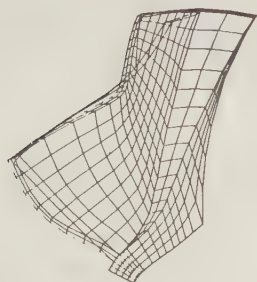
Die berechneten ersten sechs kleinsten Eigenformen der Schaufel sind in Bild 7.04 durch überhöhte Darstellung der auf die Maximalauslenkung normierten Verformungen wiedergegeben. Zum Vergleich ist in dem Bild auch die Kontur der unausgelenkten Schaufel eingezeichnet. Es sind nur die Eigenverformungen der Rechnung mit 80 Elementen dargestellt. Da die Schaufelverformungen aus der Rechnung mit 16 Elementen in dieser Darstellungsweise keine anderen Informationen mitteilen, wird auf deren Darstellung verzichtet.



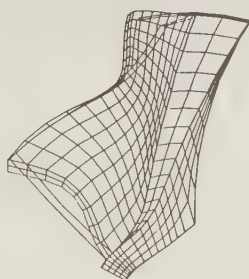
1. Eigenform



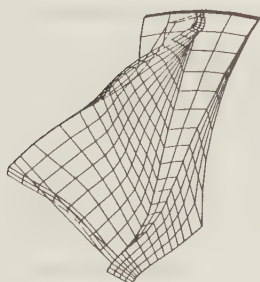
2. Eigenform



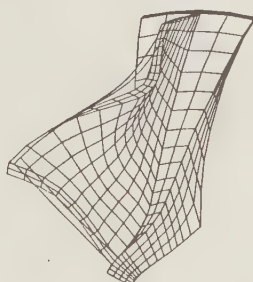
3. Eigenform



4. Eigenform



5. Eigenform



6. Eigenform

Bild 7.04: Berechnete erste sechs Eigenformen einer Radialverdichterschaufel überhöht dargestellt

Wegen der verwundenen Geometrie der Schaufel ist im Gegensatz zum Biegebalken eine Klassifizierung der Verformungen in Biege- oder Torsionsverformungen nicht möglich. Die Schaufel wird aufgrund der Einspannung entlang der gesamten Radscheibenkontur verschiedenartig ausgelenkt.

Bei der ersten Eigenfrequenz erfährt die Schaufelspitze am Eintritt die größten Verformungen, während der Schaufelbereich zum Kanalaustritt hin nur wenig ausgelenkt wird. Die gesamte Schaufel wird mit mehr oder minder großen Amplituden in die gleiche Richtung ausgelenkt. Die größte Belastung der Schaufel tritt in dem Übergangsbereich vom Schaufeleintritt zum radial verlaufenden Teil auf, da hier aufgrund der Schaufelverformung die größten Krümmungen auf der Schaufelfläche vorhanden sind.

Ein gegenteiliges Verformungsverhalten zeigt der zweite Eigenwert. Bei ähnlicher Verformungstendenz des Laufradeintritts wie beim ersten Eigenwert verformt sich der Austritt in entgegengesetzter Richtung. Es entsteht im Bereich kurz hinter dem Eintritt eine Knotenlinie. Mit steigender Ordnung der Eigenfrequenz erhöht sich die Tendenz der Schaufel, mit einer wachsenden Anzahl von Knotenlinien zu schwingen.

Bild 7.05 zeigt die Verteilung der Resonanzfrequenzen des ausgemessenen Laufrades. Die Messungen sind mit Hilfe eines Spektrum-Analysators durchgeführt worden, wobei einzelne Schaufeln des ruhenden Laufrades durch Anschlagen zum Schwingen angeregt worden sind.

Ein quantitativer Vergleich der gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen ist in Tabelle 7.02 wiedergegeben, in welcher die relativen Abweichungen der Rechnungen bezogen auf die Meßwerte dargestellt sind.

Die Abweichungen der berechneten ersten drei Eigenwerte im Vergleich zu den Meßwerten betragen bei der Rechnung mit

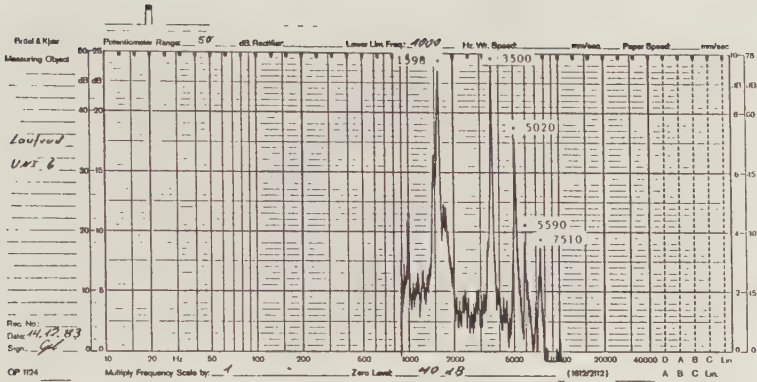


Bild 7.05: Gemessene Verteilung der Schaufeleigenfrequenzen eines schnellläufigen Radiallaufrades

80 Elementen ca. 1%. Die Toleranz der berechneten Werte liegt bereits in der Größenordnung der gemessenen Abweichungen der Eigenfrequenzen der einzelnen Schaufeln untereinander. Sie ergeben sich aus der fertigungsbedingten Streuung der einzelnen Schaufelstärken.

Eigenfrequenz [Hz]	gemessen	relative Abweichung zu Meßwerten	
		16 Elemente	80 Elemente
1	1598	+6,7 %	+0,4 %
2	3500	+4,8 %	-1,4 %
3	5020	+2,4 %	-1,0 %
4	5990	+11,3%	+6,5 %
5	7510	÷	-7,0 %

Tabelle 7.02: Vergleich gerechneter und gemessener Eigenfrequenzen einer Radialschaufel

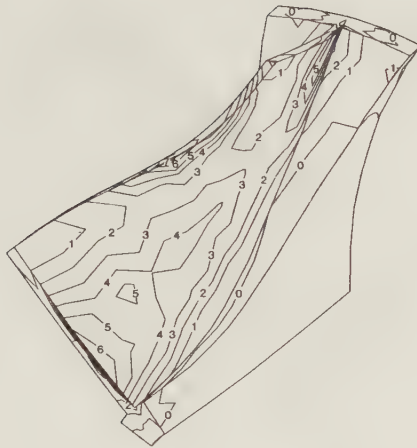
Die Abweichung bei der Rechnung mit 16 Elementen tendieren alle zu größeren Zahlenwerten hin. Dies läßt sich mit der angenommenen festen Einspannung am Schaufelfuß erklären, wodurch eine zu große Steifigkeit der Schaufel in der Rechnung simuliert wird.

Die erhöhte Genauigkeit der Lösung mit 80 Elementen muß allerdings mit einem beträchtlich vergrößerten Bedarf an Rechenkapazität erkaufte werden. Während die Rechnung mit 16 Elementen zu einer Steifigkeitsmatrix und zu einer Massenmatrix mit einem Speicherplatz von jeweils ca. 400 kByte führt, müssen bei der Rechnung mit 80 Elementen für jede Matrix ca. 2400 kByte Speicherplatz bereitgestellt werden.

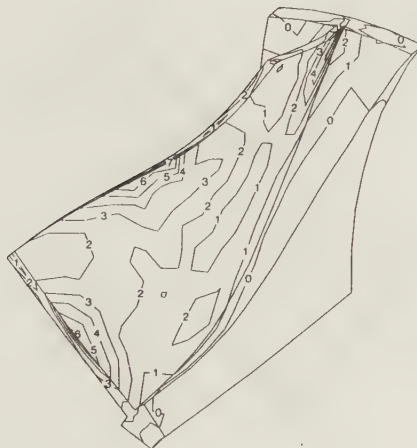
Eine Vorstellung von der Belastung der Schaufel vermittelt Bild 7.06, in welchem die Verläufe der Vergleichsspannung auf der Schaufeloberfläche für die sechs kleinsten Eigenwerte in Form von Isolinien dargestellt sind. Es sind die Verläufe der Isolinien für acht verschiedene, äquidistant unterteilte Spannungsniveaus angegeben. Die Isolinien sind mit Zahlen gekennzeichnet, wobei 0 die kleinste und 7 die größte Spannung bezeichnet. Analog zu den Eigenverformungen ist keine Zuordnung zu absoluten Spannungen möglich, da die Ergebnisse auf einer Eigenwertberechnung beruhen.

Dem Bild ist zu entnehmen, daß für sämtliche Eigenfrequenzen die maximale Schaufelbelastung im Bereich der Schaufelkanten entweder am Eintritt oder entlang des Schaufelkopfes auftritt. Beim ersten und zweiten Eigenwert sind zusätzlich Spannungsspitzen im Schaufelfuß am Laufradaustritt vorhanden, die durch die Biegebelastung der Schaufel in diesem Bereich verursacht werden.

Bei den ersten beiden Eigenwerten sind entlang der Schaufelkanten einmal im Eintritt und einmal auf der Schaufelkopfkontur jeweils eine Spannungsspitze vorhanden, die sich unmittelbar aus der Schaufelverformung (Bild 7.04) mit der dort vorhandenen maximalen Biegung erklären. Die Spannungen

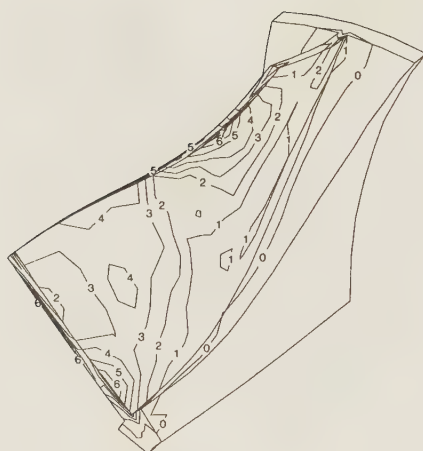


1. Eigenwert

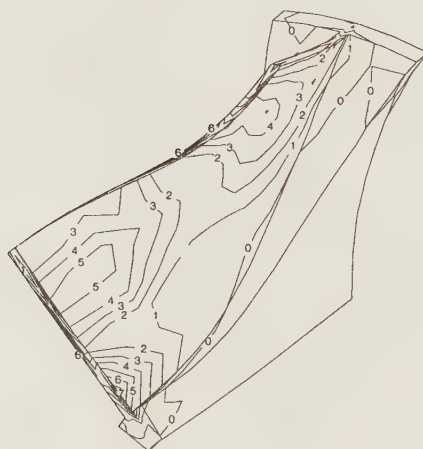


2. Eigenwert

Bild 7.06a: Verläufe der Vergleichsspannungen einer Radialverdichterschaufel bei den sechs kleinsten Eigenformen

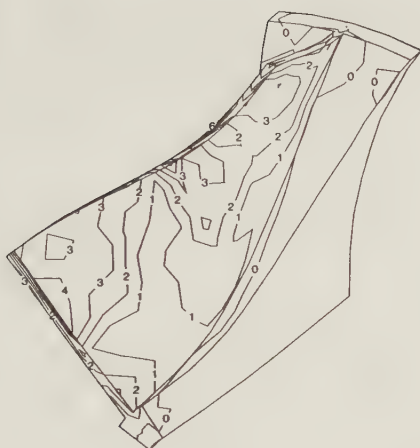


3. Eigenwert



4. Eigenwert

Bild 7.06b: Verläufe der Vergleichsspannungen einer Radialverdichterschaufel bei den sechs kleinsten Eigenformen



5. Eigenwert



6. Eigenwert

Bild 7.06c: Verläufe der Vergleichsspannungen einer Radialverdichterschaufel bei den sechs kleinsten Eigenformen

nehmen mit zunehmendem Abstand von der jeweiligen Schaufelkante zur Schaufelfläche hin relativ schnell ab. Dennoch ist eine örtlich beschränkte Gefährdung der Schaufel durch die Spannungsspitzen vorhanden, welche die in der Praxis beobachteten Schaufelbrüche entlang der gedachten Verbindungslinie zwischen den Orten der Spannungsspitzen erklärt /9/.

Beim dritten Eigenwert sind entlang der Schaufeleintrittskante und der kopfseitigen Schaufelkante jeweils zwei Spannungsmaxima vorhanden, die sich einmal auf der Schaufelsaug- und einmal auf der Schaufeldruckseite befinden.

Diese Tatsache steht in Einklang mit dem Verformungsverhalten der Schaufel, welche beim dritten Eigenwert s-förmige Ausschläge erfährt, wie dies besonders aus dem Verformungsverlauf der Eintrittskante in Bild 7.04 deutlich zu erkennen ist. Das Spannungsmaximum im Austrittsbereich ist bei diesem Eigenwert sowie bei den weiteren nicht mehr vorhanden.

Der vierte Eigenwert zeigt relativ große Spannungsgradienten unmittelbar auf der Fläche des Schaufeleintritts, wobei die absolut größte Spannung unmittelbar am Schaufelfuß vorhanden ist. Die große Biegebelastung der Schaufel an dieser Stelle spiegelt sich durch die starke Eigenverformung der Schaufeleintrittskante wider, welche im Vergleich zu den restlichen Eigenwerten auch die größten Amplituden erfährt (Bild 7.04).

Bei dem fünften und sechsten Eigenwert treten sie Spannungsmaxima nur im Bereich der kopfseitigen Schaufelkante auf, wobei neben den kleineren Maxima jeweils ein Bereich mit den absolut größten Spannungen hervortritt. Dieser Effekt ist bei dem sechsten Eigenwert besonders deutlich vorhanden, wobei auffällt, daß die Spannungsspitze dieses Eigenwertes an der gleichen Stelle auftritt wie diejenige des ersten Eigenwertes.

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit umfaßt die Festigkeitsanalyse von Radiallaufrädern beliebiger Bauform. Hierzu ist ein Programmsystem, dem die Methode der finiten Elemente zugrunde liegt, erstellt worden.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der über den Fliehkrafteinfluß hinausgehenden Berücksichtigung der ungleichförmigen Temperaturverteilung auf die Spannungen und Dehnungen von Radiallaufrädern.

Da die Berechnung der temperaturbedingten Spannungen und Dehnungen die Kenntnis der vorliegenden Temperaturverteilung im Laufrad erfordert, ist zunächst exemplarisch an einem Versuchslaufrad die vorhandene Oberflächentemperaturverteilung mit Hilfe einer Infrarot-Wärmebildkamera gemessen worden. Um das Laufrad im Betrieb thermografieren zu können, ist ein stroboskopischer Effekt dazu ausgenutzt worden, ein vollständiges Wärmebild des rotierenden Laufrades aufzuzeichnen. Dabei ist die Zwischenschaltung eines Derotatorsystems in den Strahlengang nicht erforderlich.

Aus den Meßwerten ergibt sich für das Versuchslaufrad eine radiale Temperaturverteilung, deren Temperaturniveau im Austritt trotz der radialen Wärmeleitung im Laufradkörper deutlich über der statischen Temperatur des verdichteten Fördermediums in diesem Bereich liegt. Ursache hierfür ist die Reibungswärme in der Grenzschicht, welche bei den in Radiallaufrädern vorliegenden hohen Geschwindigkeiten den Wärmeübergang beeinflußt. Dabei sind zur Berechnung des Wärmeüberganges sowohl auf der Laufradvorder- als auch auf der Laufradrückseite die jeweiligen Totaltemperaturen des Fluids maßgebend. Der gleiche Effekt führt zu einer zusätzlichen Aufwärmung des Laufrades durch die Radseitenreibung auf der Laufradrückseite.

Mit den gemessenen Oberflächentemperaturen liegt die Temperaturverteilung im Laufradkörper fest und kann mit der Methode der finiten Elemente nach Vorgabe der Meßwerte auf der gesamten Oberfläche berechnet werden. Da diese Vorgehensweise allerdings nur auf das Versuchslaufrad beschränkt bleiben kann, ist ein auf vereinfachenden Annahmen beruhendes thermodynamisches Modell erarbeitet worden, welches die Berechnung der Laufradtemperaturverteilung aus dem gasseitigen Wärmeübergang erlaubt. Dabei werden zur Ermittlung der Wärmeübergangszahlen auf der Laufradvorderseite die bekannten Gesetze der längsangeströmten, ebenen Platte zugrunde gelegt. Die Laufradrückseite, die als rotierende Scheibe behandelt werden kann, ist einem analytischen Lösungsansatz zugänglich.

Die zur Ermittlung der Wärmeübergangszahlen benötigte Geschwindigkeitsverteilung im Laufradkanal ist mit Hilfe des Laser-Zwei-Fokus-Verfahrens gemessen worden. Dabei zeigen sich im Vergleich zu der analytisch berechneten Geschwindigkeitsverteilung, welche auf einen reibungsfreien, zweidimensionalen Ansatz zurückgeht, zum Teil deutliche Abweichungen zwischen Rechnung und Messung. Diese belegen, daß mit Hilfe einer zweidimensionalen Rechnung die reale Strömung in Radialverdichterlaufrädern nur unzulänglich wiedergegeben werden kann, da die Sekundärströmungen im rotierenden Kanal nicht erfaßt werden können. Diese Sekundärströmungen haben bei der realen Strömung im Vergleich zur zweidimensionalen Rechnung ein fülligeres Geschwindigkeitsprofil in Umfangsrichtung zur Folge.

Um die Brauchbarkeit der abgeschätzten Wärmeübergangszahlen beurteilen zu können, ist die berechnete Oberflächentemperaturverteilung der infrarotoptisch gemessenen gegenübergestellt worden. Dabei zeigt sich anhand der lokalen Temperaturabweichungen zwischen Messung und Rechnung, daß das thermodynamische Modell trotz der vereinfachenden Voraussetzungen eine für die Festigkeitsanalyse ausreichend genaue Temperaturverteilung liefert.

Wie die durchgeführten Festigkeitsrechnungen am Beispiel zweier Laufräder einmal ohne und einmal mit Deckscheibe belegen, ist die zusätzliche Berücksichtigung der ungleichförmigen Temperaturverteilung für Laufräder, die auf einer Welle aufgeschrumpft sind, grundsätzlich angezeigt. Neben einer Zunahme der maximalen Spannungen auf der Radscheibe des halboffenen Laufrades um ca. 10% und auf der Deckscheibe des geschlossenen Laufrades um ca. 20% können sich die radialen Druckspannungen in der Nabenbohrung infolge der temperaturbedingten Nabenaufweitung so stark verringern, daß eine einwandfreie Zentrierung des Laufrades auf der Welle und gegebenenfalls die Drehmomentenübertragung gefährdet sein können. Da in diesem Bereich ebenfalls hohe Tangentialspannungsspitzen vorhanden sind, welche das Laufrad maximal belasten, erweist sich in diesem Fall die Festigkeitsanalyse nach der Methode der finiten Elemente als effektive Möglichkeit, bereits in der Auslegungsphase eines Laufrades durch gezielte Geometrieoptimierung die vorhandenen Spannungen zu minimieren.

Um die Beanspruchung von verschiedenen Laufrädern unterschiedlicher Bauform beurteilen zu können, sind für vier Laufräder die Verteilungen der Spannungen und Dehnungen berechnet worden. Damit die Belastung der einzelnen Laufräder untereinander verglichen werden kann, sind den Rechnungen gleiche Austrittsdurchmesser der Räder zugrunde gelegt.

Es ergeben sich für jede spezielle Bauform unterschiedliche Bereiche, die festigkeitsmäßig besonders beansprucht sind. Dabei erweist sich das halboffene Laufrad mit in den Saugmund vorgezogenen Schaufeln als das am geringsten belastete Laufrad. Das halboffene Laufrad mit prismatischen und in den Saugmund zurückgezogenen Schaufeln besitzt auf der Vorderseite ein deutliches Radialspannungsmaximum, welches die maximale Umfangsgeschwindigkeit begrenzt.

Es zeigen die Rechenergebnisse eines weiteren Laufrades mit Deckscheibe, das die gleiche Radscheiben- und Schaufelgeometrie wie das halboffene Laufrad besitzt, daß sich die Span-

nungen in der Radscheibe durch Aufbringen einer Deckscheibe deutlich reduzieren lassen. Allerdings ergeben sich bei der geschlossenen, prismatischen Bauform in der Deckscheibenwulst die Maximalspannungen in der gleichen Größenordnung wie sie bei dem halboffenen Laufrad in der Radscheibe vorhanden sind.

Einen relativ komplexen Spannungszustand besitzt ein analysiertes Laufrad mit Deckscheibe und räumlich verwundenen Schaufeln. Durch die in den Saugmund vorgezogene Schaufelpartie kommt es zu einer Relativdrehung zwischen Rad- und Deckscheibe, die am Laufradaustritt erhebliche Spannungsspitzen zur Folge hat. Diese Spannungsspitzen stellen gleichzeitig die maximale Belastung des Laufrades dar und erklären das in der Praxis beobachtete Lösen der Deckscheibe von den Schaufeln.

Am Beispiel eines schnellläufigen Laufrades mit in den Saugmund vorgezogenen, räumlich verwundenen Schaufeln ist eine Schwingungsanalyse durchgeführt worden. Dabei ist aus Rechenzeit- und Speicherplatzgründen nur ein einzelner, herausgeschnittener Laufradsektor berechnet worden, obwohl die exakte Schwingungsanalyse die Berechnung eines vollständigen

Laufrades erfordert, um die Koppelschwingungen der einzelnen Schaufeln zu erfassen. Daß mit dieser Vereinfachung jedoch für die Praxis brauchbare Ergebnisse erzielt werden können, zeigen die zum Vergleich durchgeführten Messungen der Schaufelfrequenzen. Die Abweichungen zwischen Messung und Rechnung besitzen bei den kleinsten drei Eigenfrequenzen die gleiche Größenordnung wie die gemessenen fertigungsbedingten Unterschiede der Eigenfrequenzen verschiedener Schaufeln eines Laufrades untereinander.

Um die Eigenfrequenzen des rotierenden Laufrades berechnen zu können, sollte der in dieser Arbeit unberücksichtigt gebliebene Einfluß der Fliehkraft, welcher eine Vergrößerung der Eigenfrequenzen zur Folge hat, zusätzlich in das Rechenprogramm eingearbeitet werden. Die verwendeten

20-Knoten-Elemente der Serendipity-Klasse, die eine zweimalige Differentiation der Formfunktionen zulassen, eignen sich grundsätzlich zur Erfassung dieses Einflusses.

Mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Programmsystem können die für den Betrieb von Radiallaufrädern wichtigen Spannungen und Dehnungen bei statischer und dynamischer Beanspruchung vorausberechnet werden, womit ein Beitrag zur Steigerung der Betriebssicherheit geleistet wird.

Anhang 1

Grundlagen des Finite-Element-Verfahrens

Nachfolgend werden die wesentlichen Grundlagen des Finite-Element-Verfahrens sowie diejenigen mathematischen Zusammenhänge beschrieben, die im Rahmen dieser Arbeit zur Festigkeitsanalyse von Radialverdichterlaufrädern benötigt worden sind.

A1.1 20-Knoten-Element der Serendipity-Klasse

Zur Berechnung des dreiachsigen Spannungszustandes, wie er in Radiallaufrädern vorausgesetzt werden muß, kommen nur dreidimensionale finite Elemente in Frage. Neben dem dreidimensionalen Quaderelement mit 8 Knoten an den Elementecken haben die Elemente der sogenannten Serendipity-Klasse mit 20 Knoten ihre Eignung zur Spannungs- und Dehnungsanalyse von Radiallaufrädern nachgewiesen /11/. Der Vorteil der 20-Knoten-Elemente gegenüber den 8-Knoten-Quaderelementen besteht darin, daß durch die zusätzliche Definition von Seitenmittenknoten dem Element die Möglichkeit gegeben wird, gekrümmte Konturen nachzubilden. Dem genannten Vorteil steht als Nachteil ein wesentlich höherer Programmieraufwand der 20-Knoten-Elemente im Vergleich zu den 8-Knoten-Elementen gegenüber. Die Steifigkeitsmatrix für ein einzelnes 20-Knoten-Element beinhaltet bereits 3600 Zahlenwerte. Für ein 8-Knoten-Element reichen 576 Speicherplätze aus.

Aus Gründen der flexibleren Geometrienachbildung, die insbesondere bei der Nachbildung von Radiallaufrädern zum Tragen kommt, werden im Rahmen dieser Arbeit die 20-Knoten-Elemente verwendet.

Zur Berechnung von Radialverdichterlaufrädern, die eine periodische Rotationssymmetrie der einzelnen Strömungskanäle aufweisen, ist die Verwendung eines Zylinderkoordinatensystems sinnvoll. In Bild A1.01 ist ein gekrümmtes finites Element der Serendipity-Klasse mit 20 Knoten als rotationssymmetrischer Sektorausschnitt dargestellt.

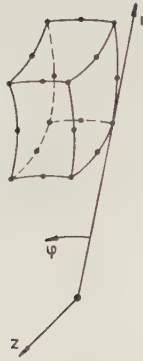


Bild A1.01: Gekrümmtes finites Element der Serendipity-Klasse in Zylinderkoordinaten

A1.2 Verformungsverlauf und Knotenverformungen

Zur Formulierung der mathematischen Zusammenhänge erweist sich die Benutzung der Matrizenschreibweise als sinnvoll. Der Verformungsvektor $[f]$, der den dreidimensionalen Verformungszustand innerhalb eines Elementes beschreibt, ist definiert durch

$$[f] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (A1.01)$$

mit den Komponenten u , v , w als Verformungen in die entsprechenden Koordinatenrichtungen (Bild A1.02).

Die Verformungen der Knotenpunkte werden zu einem Vektor $[a]$ zusammengefaßt. Dieser Vektor setzt sich aus gleich vielen Untervektoren $[a_i]$ zusammen, wie das Element Knoten besitzt:

$$[a] = \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_{20}] \end{bmatrix} \quad (A1.02)$$

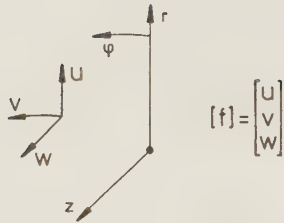


Bild A1.02: Verformungsvektor $[f]$ mit Komponenten in Zylinderkoordinaten

Der Untervektor $[a_i]$ beinhaltet die Verformungskomponenten des Knotens i in die jeweiligen Koordinatenrichtungen (Bild A1.03):

$$[a_i] = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{bmatrix}_i \quad (A1.03)$$

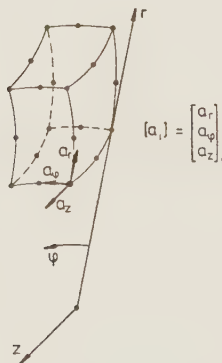


Bild A1.03: Finites Element mit Verformungskomponenten eines Knotens $[a_i]$

A1.3 Formfunktionen und Koordinatentransformation

Die Definition eines für jedes Element eigenen dimensionslosen Koordinatensystems (ξ, η, ρ) erlaubt eine von der jeweiligen Elementenlage und -größe unabhängige mathematische Formulierung der festigkeitsmechanischen Zusammenhänge.

Bild A1.04 zeigt ein dreidimensionales finites Element mit den dimensionslosen Koordinaten (ξ, η, ρ) .

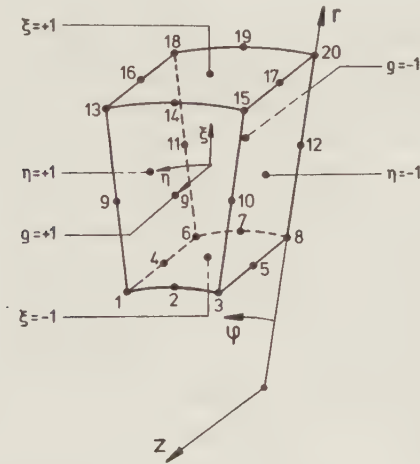


Bild A1.04: Dimensionslose Koordinaten

Die Lage des dimensionslosen Koordinatensystems ist so definiert, daß die Koordinaten ξ, η und ρ an den Rändern des Elementes die Werte $+1$ oder -1 annehmen.

Die beim Finite-Element-Verfahren zu definierenden Formfunktionen $[N]$ erlauben die Beschreibung des Verformungsverlaufes $[f]$ an jedem Punkt innerhalb des Elementes als Funktion der Knotenverformungen $[a]$.

Für die Funktion N_i eines Knotens wird gefordert, daß diese im Knotenpunkt i mit den Koordinaten (ξ_i, η_i, ρ_i) den Wert 1 annimmt und in allen anderen Knotenpunkten verschwindet:

$$N_i(\xi_j, \eta_j, \rho_j) = \begin{matrix} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i \end{matrix} \quad (\text{A1.04})$$

Für das in Bild A1.04 dargestellte Element ergibt sich bei der dort gewählten Zuordnung von Knotenpunktnummerierung zur Lage des dimensionslosen Koordinatensystems für die Funktionen:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi) (1+\eta) (1+\rho) (-\xi+\eta+\rho-2) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi) (1-\eta^2) (1+\rho) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1-\xi) (1-\eta) (1+\rho) (-\xi-\eta+\rho-2) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi) (1+\eta) (1-\rho^2) \\ N_5 &= \frac{1}{4}(1-\xi) (1-\eta) (1-\rho^2) \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1-\xi) (1+\eta) (1-\rho) (-\xi+\eta-\rho-2) \\ N_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi) (1-\eta^2) (1-\rho) \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi) (1-\eta) (1-\rho) (-\xi-\eta-\rho-2) \\ N_9 &= \frac{1}{4}(1-\xi^2) (1+\eta) (1+\rho) \\ N_{10} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2) (1-\eta) (1+\rho) \\ N_{11} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2) (1+\eta) (1-\rho) \\ N_{12} &= \frac{1}{4}(1-\xi^2) (1-\eta) (1-\rho) \\ N_{13} &= \frac{1}{8}(1+\xi) (1+\eta) (1+\rho) (+\xi+\eta+\rho-2) \\ N_{14} &= \frac{1}{4}(1+\xi) (1-\eta^2) (1+\rho) \\ N_{15} &= \frac{1}{8}(1+\xi) (1-\eta) (1+\rho) (+\xi-\eta+\rho-2) \\ N_{16} &= \frac{1}{4}(1+\xi) (1+\eta) (1-\rho^2) \\ N_{17} &= \frac{1}{4}(1+\xi) (1-\eta) (1-\rho^2) \\ N_{18} &= \frac{1}{8}(1+\xi) (1+\eta) (1-\rho) (+\xi+\eta-\rho-2) \end{aligned} \quad (\text{A1.05})$$

$$\begin{aligned} N_{19} &= \frac{1}{4}(1+\xi) (1-\eta^2) (1-\rho) \\ N_{20} &= \frac{1}{8}(1+\xi) (1-\eta) (1-\rho) (+\xi-\eta-\rho-2) \end{aligned} \quad (A1.05)$$

Mit Hilfe der Formfunktionen läßt sich der Verformungsverlauf $[f]$ als Funktion der Knotenverformungen $[a]$ ausdrücken durch:

$$[f] = \sum_{i=1}^{20} [N_i] [a_i] \quad (A1.06)$$

oder

$$[f] = [N] [a] \quad (A1.07)$$

Damit die Matrizenoperation durchgeführt werden kann, muß für die Matrix $[N]$ gelten:

$$[N] = [[N_1], [N_2], \dots [N_i], \dots [N_{20}]] \quad (A1.08)$$

und

$$[N_i] = N_i [I] \quad (A1.09)$$

mit

$[I]$ als 3x3 Einheitsmatrix:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A1.4 Spannungs- und Dehnungsbeziehungen

Aus den Verformungen $[f]$ lassen sich die Verzerrungen $[\epsilon]$ bestimmen. Die in Matrizenschreibweise formulierte Beziehung zwischen beiden lautet:

$$[\epsilon] = [L] [f] \quad (A1.10)$$

Dabei stellt $[L]$ einen Operator dar. Mit Hilfe von Gleichung A1.07 kann geschrieben werden

$$[\varepsilon] = [B] [a]$$

mit

$$(A1.11)$$

$$[B] = [L] [N]$$

Die Definition des Operators $[L]$ ergibt sich aus den Beziehungen zwischen den Verformungen und Verzerrungen. Es gilt in Zylinderkoordinaten für den dreiachsigen Spannungszustand:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (A1.12)$$

Damit folgt für den Operator $[L]$:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (A1.13)$$

und für die Matrix [B]:

$$[B] = [[B_1], [B_2], \dots, [B_i], \dots, [B_{20}]] \quad (A1.15)$$

mit

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{N_i}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Da die Formfunktionen N_i in lokalen dimensionslosen Koordinaten (ξ, η, ρ) definiert sind, erfordert die Berechnung der Matrix [B] eine Koordinatentransformation, um die globalen Ableitungen nach (r, φ, z) aus Gleichung A1.15 durch die lokalen Ableitungen nach (ξ, η, ρ) auszudrücken.

Für die beiden Koordinatensysteme (r, φ, z) und (ξ, η, ρ) gilt der folgende funktionale Zusammenhang:

$$\begin{aligned} r &= r(\xi, \rho) \\ \varphi &= \varphi(\xi, \eta, \rho) \\ z &= z(\xi, \rho) \end{aligned} \quad (A1.16)$$

Die alleinige Abhängigkeit der Koordinaten r und z von ξ und ρ berücksichtigt die Tatsache, daß es sich bei einem Element um einen rotationssymmetrischen Sektorausschnitt handelt (Bild A1.05).

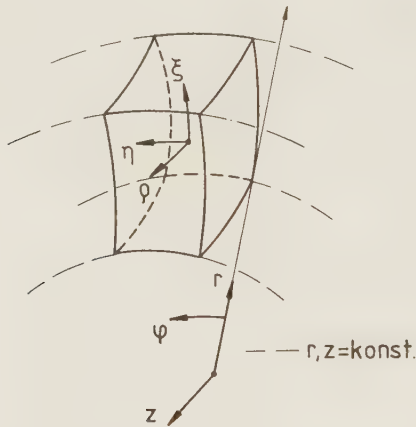


Bild A1.05: Finites Element als rotationssymmetrischer Sektorausschnitt

Aufgrund des funktionalen Zusammenhanges der beiden Koordinatensysteme gilt für die ersten Ableitungen nach den dimensionslosen Koordinaten mit Hilfe der Kettenregel mit

$$N_i = N_i(r, \varphi, z):$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (\text{A1.17})$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \rho} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

Gleichung A1.17 läßt sich in Matrizenform ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial r}{\partial \rho} & \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (A1.18)$$

Die Matrix $[J]$ ist die Jakobi-Matrix. Die linke Seite der Gleichung läßt sich berechnen, da die Formfunktionen N_i in lokalen Koordinaten (ξ, η, ρ) nach Gleichung A1.05 definiert sind. Die Elemente der Jakobi-Matrix können ebenfalls berechnet werden. Dazu wird für die Koordinaten (r, φ, z) der gleiche Ansatz wie für die Verformungen $[f]$ nach Gleichung A1.06 benutzt:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{20} N_i r_i \\ \varphi &= \sum_{i=1}^{20} N_i \varphi_i \\ z &= \sum_{i=1}^{20} N_i z_i \end{aligned} \quad (A1.19)$$

Damit folgt z.B. für die Ableitung von r nach ξ :

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \quad (A1.20)$$

Analog zu Gleichung A1.20 können sämtliche Ableitungen berechnet werden.

Nach der Berechnung von $[J]$ lassen sich durch Invertierung die benötigten Ableitungen von $[N]$ nach (r, φ, z) bestimmen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \rho} \end{bmatrix} \quad (A1.21)$$

Die Abhängigkeit zwischen den Spannungen $[\sigma]$ und den Dehnungen $[\epsilon]$ ist durch das Formänderungsgesetz für homogene, isotrope, linear-elastische Körper festgelegt.

Das Formänderungsgesetz lautet für den dreiachsigen Spannungszustand in Zylinderkoordinaten /1/:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{rr})) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})) + \alpha \Delta T \\ \epsilon_{r\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\varphi} \\ \epsilon_{rz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} \\ \epsilon_{\varphi z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\varphi z} \end{aligned} \quad (A1.22)$$

Hierin bedeuten:

- E = Elastizitätsmodul
- ν = Querkontraktionszahl
- α = linearer Wärmeausdehnungskoeffizient

Dieses Formänderungsgesetz ist eindeutig nach den Normalspannungen σ_{ii} und den Schubspannungen τ_{ij} auflösbar. In Matrizenschreibweise ergibt sich:

$$[\sigma] = [D] \quad ([\epsilon] - [\epsilon]_{\alpha}) \quad (A1.23)$$

mit

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{r\varphi} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi z} \end{bmatrix} \quad (A1.24)$$

und

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{r\varphi} \\ \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\varphi z} \end{bmatrix} \quad (A1.25)$$

Die Dehnungen $[\epsilon]_{\alpha}$ sind die aufgrund einer Temperaturerhöhung ΔT hervorgerufenen Verzerrungen. Aus Gleichung A1.23 folgt für die Temperaturdehnungen $[\epsilon]_{\alpha}$:

$$[\epsilon]_{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & \Delta T \\ \alpha & \Delta T \\ \alpha & \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A1.26)$$

Die Matrix $[D]$ ist die Elastizitätsmatrix, in der die Materialeigenschaften enthalten sind. Diese Matrix folgt aus Gleichung A1.23 und hat die Form:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (A1.27)$$

A1.5 Prinzip der virtuellen Verrückung

Die Herleitung der Steifigkeitsbeziehung läßt sich nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit oder der virtuellen Verrückung durchführen. Innerhalb eines elastischen, isotropen, ruhenden Körpers, für den bei den folgenden Betrachtungen nicht festgelegt ist, ob es sich um ein einzelnes Element oder das gesamte zu berechnende Kontinuum handelt, können folgende Energieformen auftreten:

- Die spezifische, auf das Volumen bezogene Formänderungsarbeit a_σ infolge der Spannungen σ

$$a_\sigma = [\sigma]^T [\epsilon] = [\epsilon]^T [\sigma] \quad (A1.28)$$

- Die spezifische, auf das Volumen bezogene Arbeit a_b infolge der Volumenkräfte $[b]$

$$a_b = [b]^T [f] = [f]^T [b] \quad (A1.29)$$

- Die spezifische, auf die Oberfläche bezogene Arbeit a_s infolge der Oberflächenkräfte $[s]$

$$a_s = [s]^T [f] = [f]^T [s] \quad (A1.30)$$

- Die von den Knotenkräften $[q]$ verrichtete Arbeit A_q

$$A_q = [q]^T [a] = [a]^T [q] \quad (A1.31)$$

Im Falle von statischem Gleichgewicht gilt, daß bei einer willkürlich erteilten virtuellen Verrückung der Knoten $\delta[a]$ die dabei verrichtete äußere Arbeit δA infolge der Kräfte gleich der Variation der Formänderungsenergie δU infolge der Spannungen ist.

Entsprechend Gleichung A1.07 und A1.11 lauten die Verschiebungen $\delta[f]$ und die Verzerrungen $\delta[\epsilon]$ innerhalb eines Elementes aufgrund einer virtuellen Verrückung an den Knoten $\delta[a]$

$$\delta[f] = [N] \delta[a] \quad (A1.32)$$

und

$$\delta[\epsilon] = [B] \delta[a] \quad (A1.33)$$

Damit ergibt sich nach Integration über das Gesamtvolumen bzw. über die Oberfläche aus

$$\delta U - \delta A = 0 \quad (A1.34)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \delta a_\sigma dV \\ &= \int_V \delta[\epsilon]^T [\sigma] dV \\ \delta U &= \delta[a]^T \int_V [B]^T [D] [B] dV [a] \\ &\quad - \delta[a]^T \int_V [B]^T [D] [\epsilon]_\alpha dV \end{aligned} \quad (A1.35)$$

und mit

$$\delta A = \int_V \delta a_b dV + \int_0 \delta a_s dO + \delta A_q$$

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_V \delta[f]^T [b] dV + \int_0 \delta[f]^T [s] dO + [a]^T [q] \\ &= \delta[a]^T \int_V [N]^T [b] dV + \delta[a]^T \int_0 [N]^T [s] dO + \delta[a]^T [q]\end{aligned}\quad (A1.36)$$

die Steifigkeitsbeziehung:

$$[K] [a] = [F] \quad (A1.37)$$

In Gleichung A1.37 ist $[K]$ die Steifigkeitsmatrix und $[F]$ der Lastvektor des Systems. Aus Gleichung A1.35 folgt für die Steifigkeitsmatrix

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (A1.38)$$

und für den Lastvektor aus den Gleichungen A1.35 und A1.36

$$\begin{aligned}[F] &= \int_V [N]^T [b] dV \\ &+ \int_V [B]^T [D] [e]_\alpha dV \\ &+ \int_0 [N]^T [s] dO \\ &+ [q]\end{aligned}\quad (A1.39)$$

In Gleichung A1.39 berücksichtigt der letzte Term $[q]$ die Knotenkräfte. Für die Betrachtung eines einzelnen Elementes sind in $[q]$ sowohl einzelne, diskret an den Knotenpunkten angreifende äußere Kräfte enthalten als auch diejenigen inneren Kräfte, welche beim Freischneiden eines einzelnen Elementes aus einem Gesamtsystem als Schnittkräfte auftreten. Letztere können jedoch bereits bei der Betrachtung eines einzelnen Elementes unberücksichtigt bleiben, da bei dem Zusammenbau der einzelnen Elemente zur Gesamtstruktur die Summe aller inneren Knotenkräfte Null ergibt.

Die Integration der Gleichungen A1.38 und A1.39 erfordert die Transformation in die lokalen Koordinaten (ξ, η, ρ) . Für das Volumenelement dV gilt mit $\det[J]$ als Determinante der Jakobi-Matrix $[J]$:

$$dV = dr \, rd\varphi \, dz = \det[J] \, d\xi \, rd\eta \, d\rho \quad (A1.40)$$

Die Integrationsgrenzen erstrecken sich bei der Integration in den dimensionslosen Koordinaten (ξ, η, ρ) von -1 bis +1. Damit berechnet sich die Steifigkeitsmatrix zu:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V [B]^T [D] [B] \, dV \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] \, d\xi \, rd\eta \, d\rho \quad (A1.41) \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Lastvektors kann der letzte Term, welcher die Oberflächenkräfte berücksichtigt, entfallen. Durch diesen Term werden die vorhandenen Fluidkräfte aufgrund der ungleichförmigen Druckverteilung über der Laufradoberfläche berücksichtigt. Diese können bei Radiallauf- rädern zur Förderung von atmosphärischer Luft im Gegensatz zu flüssigkeitsfördernden Laufrädern vernachlässigt werden.

An den einzelnen Knotenpunkten diskret angreifende Kräfte sind ebenfalls nicht zu berücksichtigen. Damit gilt für den Lastvektor:

$$\begin{aligned} [F] &= \int_V [N]^T [b] \, dV \\ &+ \int_V [B]^T [D] [\epsilon]_{\alpha} \, dV \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T [b] \det[J] \, d\xi \, rd\eta \, d\rho \\ &+ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [\epsilon]_{\alpha} \det[J] \, d\xi \, rd\eta \, d\rho \quad (A1.42) \end{aligned}$$

A1.6 Berücksichtigung der Fliehkraft

Die Berücksichtigung der Fliehkraft erfolgt durch den ersten Term des Lastvektors $[F]$ mit der spezifischen auf das Volumen bezogenen Belastung $[b]$

$$[b] = \begin{bmatrix} b_r \\ b_\varphi \\ b_z \end{bmatrix} \quad (A1.43)$$

In Bild A1.06 ist ein differentielles Volumenelement in Zylinderkoordinaten mit der Fliehkraft als spezifische, auf das Volumen bezogene Belastung dargestellt.

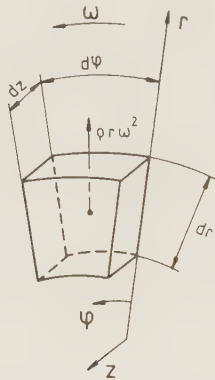


Bild A1.06: Differentielles Volumenelement mit spezifischer Fliehkraft $\rho r \omega^2$

Die Fliehkraft ist in radiale Richtung gerichtet. Damit folgt mit ω als Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Lauf-
rades für die spezifische Belastung:

$$[b] = \begin{bmatrix} \rho r \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A1.44)$$

Al.7 Berücksichtigung der Temperaturverteilungen

Die Berücksichtigung der Temperaturdehnungen erfolgt durch den zweiten Term des Lastvektors $[F]$ aus Gleichung Al.42. Für die aufgrund einer Temperaturerhöhung ΔT hervorgerufenen Ersatzknotenkräfte $[F]_T$ gilt:

$$[F]_T = \int_V [B]^T [D] [\epsilon]_\alpha dV \quad (Al.45)$$

mit

$$[\epsilon]_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (Al.46)$$

Abweichend zu der in der Literatur /1,2/ beschriebenen Vorgehensweise, die Temperaturdehnungen innerhalb eines Elementes konstant vorauszusetzen und von einer mittleren Temperaturerhöhung eines Elementes ΔT_e auszugehen, wird in dieser Arbeit der stetige Temperaturverlauf innerhalb eines Elementes berücksichtigt. Mit Hilfe der Formfunktionen kann der Verlauf der Temperaturerhöhung in Abhängigkeit der dimensionslosen Koordinaten (ξ, η, ρ) ausgedrückt werden durch

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{20} N_i \Delta T_i \quad (Al.47)$$

Die Temperaturerhöhungen ΔT_i sind die Temperaturerhöhungen an den Knotenpunkten. Sie werden als bekannt vorausgesetzt. Damit ergeben sich die Ersatzknotenkräfte durch Integration über das Elementvolumen zu:

$$[F]_T = \begin{matrix} +1 & +1 & +1 \\ \int & \int & \int \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} [B]^T [D]$$

$$\begin{bmatrix} \sum N_i & \Delta T_i \\ \sum N_i & \Delta T_i \\ \sum N_i & \Delta T_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det[J] \, d\xi \, r \, d\eta \, d\rho \quad (A1.48)$$

A1.8 Compilation des Gesamtsystems

Zur Berechnung des Spannungsverlaufes in einem Laufradsektor muß die Gesamtsteifigkeitsmatrix der vollständigen Geometrie sowie der Gesamtbelastungsvektor ermittelt werden. Dies erfolgt in einem sogenannten Compilationsprozeß, in dem die Einzelsteifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente zu der Gesamtsteifigkeitsmatrix durch Addition der einzelnen Koeffizienten überlagert werden. Der Überlagerungsalgorithmus berücksichtigt die geometrische Anordnung der einzelnen Elemente und setzt eine globale Punktnumerierung aller in dem Laufradsektor vorkommenden Punkte voraus. In Bild A1.07 ist die schematisierte Elementanordnung zur Nachbildung eines Laufradsektors ohne Deckscheibe in Form eines Gitterlinienmodells dargestellt. Die Berücksichtigung der periodischen Rotationssymmetrie ist durch die gleichen Punktnummern auf dem linken und rechten Schnittufer gewährleistet. Hierdurch ergeben sich an beiden Seiten der Radscheibe gleiche Verformungen, so daß zur Spannungs- und Dehnungsanalyse eines gesamten Laufrades die Berechnung eines herausgeschnittenen Sektors ausreicht.

Anhand Bild A1.07 soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, verschiedene geringfügig geänderte Elementanordnungen mit dem gleichen Rechenprogramm zu berechnen, ohne die globale Punktnumerierung ändern zu müssen. Das in Bild A1.07 dargestellte Gitterlinienmodell ist für Laufräder ohne Deck-

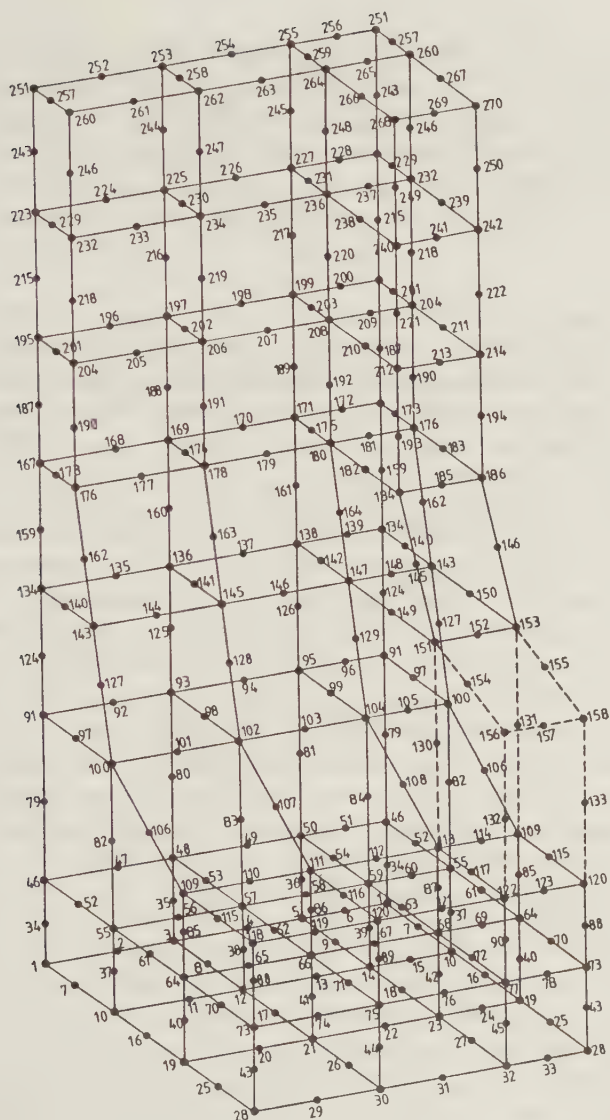


Bild A1.07: Schematische Elementanordnung eines Laufrad-sektors mit globaler Punktnummerierung

scheibe und in den Saugmund vorgezogenen Schaufeln ausgelegt. Unter der Annahme, daß ein Laufrad mit in den Saugmund zurückgezogenen Schaufeln berechnet werden soll, müßte das gestrichelte Element entfallen. Die unter normalen Bedingungen erforderliche Neunummerierung aller Punkte, die größer als 153 sind, läßt sich durch folgende Vorgehensweise umgehen:

Es wird zunächst von unveränderten Verhältnissen ausgegangen, indem für das gestrichelt eingezeichnete Element eine fiktive Geometrieaufbereitung insofern durchgeführt wird, als bei der Eingabe der Laufradgeometrie der Schaufeleintritt um das fiktive Element erweitert und in den Saugmund vorverlegt wird.

Im weiteren Programmablauf muß dafür Sorge getragen werden, daß die Elementsteifigkeitsmatrix des fiktiven Elementes nicht in die Gesamtsteifigkeitsmatrix compiliert wird, was durch einfaches Überspringen der entsprechenden Programmenteile realisiert werden kann. Anschließend müssen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix die Gleichungen der nicht zu berücksichtigenden Knotenpunkte 132, 133 und 154 bis 158 eliminiert werden. Dies erfolgt am zweckmäßigsten dadurch, daß für sämtliche Verschiebungskomponenten dieser Punkte eine homogene Randbedingung vorausgesetzt wird. Die Berücksichtigung der Randbedingungen in der Steifigkeitsbeziehung ist in Anhang A1.9 beschrieben.

Der Compilationsprozeß wird im folgenden anhand von zwei Elementen beschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden hierfür ebene Dreieckselemente mit 3 Knoten benutzt. In Bild A1.08 sind zwei Dreieckselemente einmal einzeln mit ihrer lokalen Numerierung und einmal zusammengefügt mit der globalen Numerierung des Systems dargestellt. Sowohl die lokale wie auch die globale Numerierung sind in Bild A1.08 willkürlich festgelegt.

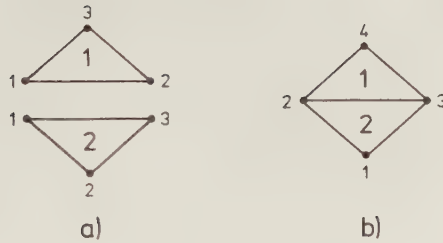


Bild A1.08: Dreieckselemente a) einzeln
 b) zusammengefügt

Die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente $[K_e]$ lauten, wenn der hochgestellte Index die Elementnummer angibt:

$$[K_e^1] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \quad (A1.49)$$

$$[K_e^2] = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Bei den Steifigkeitsmatrizen der Gleichung A1.49 handelt es sich im dreidimensionalen Fall um 9×9 Matrizen (3 Knotenpunkte mit jeweils 3 Verschiebungskomponenten). Die K_{ij} sind quadratische Untermatrizen der Ordnung n , wobei n die Anzahl der an den Knoten auftretenden Verschiebungsrichtungen ist.

Mit der Definition der globalen Knotennummerierung ist für jedes Element einer jeden lokalen Punktnummer eine neue Punktnummer im globalen Nummernsystem zugeordnet. Für die neue Indizierung der Untermatrizen K_{ij} in der Gesamtsteifigkeitsmatrix gilt, wenn i, j die Indices der lokalen Numerierung sind und die Punktnummern i, j in die Punktnummern n, m des globalen Systems übergehen:

$$\begin{aligned} i &\rightarrow n \\ j &\rightarrow m \end{aligned} \quad (A1.50)$$

$$K_{ij}^e = K_{nm}$$

Damit folgt für die Steifigkeitsmatrix $[K]$ der zusammengeführten Dreieckselemente mit der in Bild A1.08 gewählten Numerierung:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0+K_{22}^2 & 0+K_{21}^2 & 0+K_{23}^2 & 0+0 \\ 0+K_{12}^2 & K_{11}^1+K_{11}^2 & K_{12}^1+K_{13}^2 & K_{13}^1+0 \\ 0+K_{32}^2 & K_{21}^1+K_{31}^2 & K_{22}^1+K_{33}^2 & K_{23}^1+0 \\ 0+0 & K_{31}^1+0 & K_{32}^1+0 & K_{33}^1+0 \end{bmatrix} \quad (A1.51)$$

Entsprechend ergibt sich der zusammengeführte Lastvektor

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (A1.52)$$

aus den einzelnen Lastvektoren der Elemente

$$[F_e^1] = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [F_e^2] = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.53})$$

zu:

$$[F] = \begin{bmatrix} F_2^2 \\ F_1^1 + F_1^2 \\ F_2^1 + F_3^2 \\ F_3^1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.54})$$

A1.9 Berücksichtigung von Randbedingungen

Zur Lösung der Steifigkeitsbeziehung ist es grundsätzlich notwendig, eine gewisse Mindestanzahl von Randbedingungen zu formulieren, um eine Starrkörperverschiebung des Systems zu verhindern. Dieser anschauliche Sachverhalt drückt sich mathematisch dadurch aus, daß die Steifigkeitsmatrix $[K]$ singulär ist und das zugehörige Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Zur Berechnung eines als frei rotierend vorausgesetzten Laufrades wird die Starrkörperverschiebung dadurch ausgeschlossen, daß die Verschiebung eines Knotenpunktes in der Laufradnabe sowohl in axialer als auch in tangentialer Richtung verhindert wird. Dessen Verschiebungskomponenten sind dort gleich Null. Eine solche Randbedingung wird als homogene Randbedingung bezeichnet.

Die Berücksichtigung von inhomogenen Randbedingungen liegt z. B. dann vor, wenn für das Laufrad eine bestimmte Einspannbedingung in der Nabe in Form eines Schrumpfsitzes vorgegeben ist, oder wenn bei der Berechnung des Temperaturverlaufes im Laufrad an bestimmten Stellen der Oberfläche Randtemperaturen vorgegeben sind.

Um diese Randbedingungen zu berücksichtigen, muß die Steifigkeitsbeziehung modifiziert werden, wobei es aus programmtechnischen Gründen sinnvoll ist, die Ordnung der Matrizen nicht zu verändern.

Eine homogene Randbedingung erfordert die einfachsten Maßnahmen. Zur Veranschaulichung wird von der Steifigkeitsbeziehung mit n Gleichungen

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \cdots & K_{1j} \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \cdots & K_{2j} \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & K_{j3} \cdots & K_{jj} \cdots & K_{jn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} \cdots & K_{nj} \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (A1.55)$$

ausgegangen. Falls für die j -te Variable a_j der Wert Null vorgeschrieben ist, wird in der Matrix $[K]$ die j -te Zeile und die j -te Spalte durch Nullelemente ersetzt, das j -te Diagonalelement gleich Eins und die j -te Komponente in $[F]$ gleich Null gesetzt:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & 0 & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (A1.56)$$

Damit nimmt die j-te Gleichung die Form

$$1 \cdot a_j = 0$$

an, wodurch die j-te Variable a_j nach Auflösung des gesamten Gleichungssystems A1.56 notwendigerweise den Wert Null erhält.

Zur Berücksichtigung einer inhomogenen Randbedingung bietet sich die folgende Vorgehensweise an, welche mit guter Näherung das gewünschte Resultat liefert und programmtechnisch relativ leicht zu realisieren ist. Falls die j-te Variable a_j den Wert b annehmen soll, wird in der Matrix [K] das entsprechende Diagonalelement K_{jj} mit einer großen Zahl (z.B. 10^{15}) multipliziert und die j-te Komponente in [F] durch das Produkt aus dem Diagonalelement K_{jj} der großen Zahl und dem Randwert b ersetzt:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \cdots & K_{1j} \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \cdots & K_{2j} \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & K_{j3} \cdots & 10^{15} K_{jj} \cdots & K_{jn} \\ \vdots & & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} \cdots & K_{nj} \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ 10^{15} K_{jj} b \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (A1.57)$$

Für die j-te Gleichung folgt dann:

$$K_{j1} a_1 + K_{j2} a_2 + K_{j3} a_3 + \dots + 10^{15} K_{jj} a_j + \dots + K_{jn} a_n = 10^{15} K_{jj} b$$

oder näherungsweise:

$$10^{15} K_{jj} a_j = 10^{15} K_{jj} b$$

Für die j-te Variable a_j ergibt sich dann nach Auflösung des gesamten Gleichungssystems A1.57 näherungsweise der Wert b.

Bei der Berechnung von Schwingungsproblemen erfolgt die Berücksichtigung der stets homogenen Randbedingungen dadurch, daß jede Knotenvariable, welche den Wert Null annehmen muß, aus dem Eigenwertproblem eliminiert wird. Dazu sind die entsprechenden Zeilen und Spalten des Gleichungssystems zu streichen, wodurch die Ordnung des Gleichungssystems reduziert wird.

Anhang 2

Berechnung der Laufradtemperaturverteilung nach dem Finite-Element-Verfahren

A 2.1 Laplacesche Wärmeleitungsgleichung

Ausgangspunkt für die Berechnung des dreidimensionalen Temperaturverlaufes im Laufrad ist die Laplacesche Wärmeleitungsgleichung. Sie leitet sich aus der Energiebilanz für einen ruhenden Körper bei stationärer Wärmeleitung ab. Es wird ein geschlossenes System vorausgesetzt. Wärmequellen im Innern des Körpers seien nicht vorhanden. Damit gilt für den über die Oberfläche des Körpers fließenden gesamten Energiestrom in Form von Wärme:

$$\dot{Q} = - \oint_A \vec{q} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{A2.01})$$



Bild A2.01 Ruhender Körper als Kontrollvolumen und Systemgrenze

$\vec{q}$ ist die Wärmestromdichte mit positivem Vorzeichen bei zugeführtem Energiestrom.

$d\vec{A}$ ist der Flächennormalenvektor mit positiver Orientierung nach außen.

Mit dem Gaußschen Satz wird:

$$\oint_A \vec{q} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{q} \, dV \quad (\text{A2.02})$$

und mit Gleichung A2.01:

$$0 = - \operatorname{div} \vec{q} \quad (\text{A2.03})$$

Der Fouriersche Ansatz für die Wärmeleitung in einem isotropen Körper lautet:

$$\vec{q} = - \lambda \operatorname{grad} T \quad (\text{A2.04})$$

Aus Gleichung A2.03 folgt mit Gleichung A2.04 die Wärmeleitungsgleichung für beliebige Koordinatensysteme:

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \Delta T \quad (\text{A2.05})$$

Zur Berechnung der Temperaturverteilung in Laufrädern erweist sich die Benutzung von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) als sinnvoll:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A2.06})$$

oder

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A2.07})$$

Gleichung A2.07 ist eine elliptische Differentialgleichung und somit ein Randwertproblem. Als Randbedingungen müssen auf einen Teil des Randes die Temperaturen vorgegeben sein und auf einem anderen Teil des Randes die Wärmestromdichten $\vec{q}$ bekannt sein. Es gilt für diesen Teil des Randes mit $\frac{\partial T}{\partial n}$ als Ableitung in Richtung der äußeren Flächennormalen:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \vec{q} = 0 \quad (\text{A2.08})$$

Falls die örtliche Wärmestromdichte nicht von vornherein bekannt ist, sondern eine Funktion der jeweiligen Oberflächentemperatur ist, kann der Ansatz gemacht werden:

$$\dot{q} = \alpha(T - T_0) \quad (A2.09)$$

Die Temperatur T_0 ist eine repräsentative Gastemperatur, die für die weiteren Betrachtungen ebenso wie die Wärmeübergangszahl α als bekannt vorausgesetzt wird.

Damit folgt aus den Gleichungen A2.08 und A2.09 die allgemeine Cauchysche Randbedingung:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_0) = 0 \quad (A2.10)$$

A2.2 Variationsfunktional des Wärmeleitungsproblems

Die Lösung einer Differentialgleichung mit der Methode der finiten Elemente erfordert die Überführung dieser Gleichung in ein Funktional mit den Gesetzen der Variationsrechnung. Diese Vorgehensweise wird als inverses Problem der Variationsrechnung bezeichnet, wobei zu beachten ist, daß zu einem Variationsintegral immer eine Differentialgleichung existiert und daß die Umkehrung nicht notwendigerweise gilt.

Es wird deshalb im folgenden von einem Funktional ausgegangen und der Nachweis erbracht, daß dieses Funktional die Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten unter der vorgegebenen Randbedingung beschreibt.

Das der Differentialgleichung A2.02 und der Cauchyschen Randbedingung A2.10 zugehörige Funktional π lautet für Zylinderkoordinaten (r, φ, z) :

$$\begin{aligned} \pi = & \iiint_V \frac{1}{2} \left[\lambda_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \lambda_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)^2 + \lambda_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dV \\ & + \iint_{A_q} \left[\frac{1}{2} \alpha T^2 - \alpha T_0 T \right] dA \end{aligned} \quad (A2.11)$$

A_q ist derjenige Teil der Oberfläche, auf dem die Cauchysche Randbedingung gültig ist.

Es wird gefordert, daß das Funktional π einen stationären Wert annimmt, d.h. die erste Variation muß notwendigerweise verschwinden:

$$\delta \pi = 0 \quad (\text{A2.12})$$

Für den hier vorliegenden Fall der isotropen Wärmeleitung im Laufradkörper wird

$$\lambda = \lambda_r = \lambda_\varphi = \lambda_z \quad (\text{A2.13})$$

gesetzt.

Durch Differentiation ergibt sich aus Gleichung A2.11 das Variationsproblem:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \iiint_V \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial r} \delta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dV \\ & + \iint_{A_q} \alpha [T \delta T - T_0 \delta T] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

Es gilt nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \delta T \\ \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \delta T \right) \\ \delta \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \delta T \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

Damit folgt für Gleichung A2.14:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \iiint_V \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \delta T + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \delta T \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \delta T \right] dV \\ & + \iint_{A_q} \alpha [T \delta T - T_0 \delta T] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.16})$$

Wenn das Volumenintegral der Gleichung A2.16 in Operatoren-schreibweise dargestellt wird, kann diese Gleichung in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\delta \pi = \iiint_V \lambda \operatorname{grad} T \operatorname{grad} \delta T \, dV \quad (\text{A2.17})$$

$$+ \iint_{A_q} \alpha [T \delta T - T_0 \delta T] \, dA = 0$$

mit $\operatorname{grad} T$ in Zylinderkoordinaten /8/:

$$\operatorname{grad} T = \left[\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{\partial T}{\partial z} \right]$$

Gleichung A2.17 läßt sich mit Hilfe der ersten Greenschen Formel partiell integrieren. Die erste Greensche Formel lautet /8/:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2 \, dV &= - \iiint_V (\Delta U_1) U_2 \, dV \\ &+ \iint_A U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \, dA \end{aligned}$$

Das Flächenintegral erstreckt sich über die gesamte Oberfläche A .

Damit folgt aus Gleichung A2.17:

$$\delta \pi = - \iiint_V \lambda \Delta T \delta T \, dV \quad (\text{A2.18})$$

$$+ \iint_A \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T \, dA + \iint_{A_q} \alpha [T \delta T - T_0 \delta T] \, dA = 0$$

Wenn A_q denjenigen Teil des Randgebietes A darstellt, auf dem die Cauchysche Randbedingung gilt, und A_T denjenigen

Teil des Randgebietes A, auf dem die Randtemperaturen bekannt sind, kann für das zweite Integral in Gleichung A2.18 geschrieben werden:

$$\iint_A \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T \, dA = \iint_{A_T} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T \, dA + \iint_{A_q} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T \, dA \quad (\text{A2.19})$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von

$$\delta T = 0 \text{ auf } A_T$$

für Gleichung A2.18:

$$\delta \pi = - \iiint_V \lambda \Delta T \delta T \, dV \quad (\text{A2.20})$$

$$+ \iint_{A_q} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - T_0) \right] \delta T \, dA = 0$$

Da Gleichung A2.20 für jede beliebige Variation $\delta T \neq 0$ erfüllt sein muß, folgen mit

$$\Delta T = 0 \quad \text{und} \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - T_0) = 0$$

die Differentialgleichung A2.07 und die Cauchysche Randbedingung A2.10, womit nachgewiesen ist, daß durch die erste Variation von Gleichung A2.11 die Wärmeleitungsgleichung mit der Cauchyschen Randbedingung beschrieben wird.

A2.3 Lösung des Variationsfunktional nach der Finite-Element-Methode

Um das Funktional

$$\begin{aligned} \pi = & \iiint_V \frac{1}{2} \lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dV \\ & + \iint_{A_q} \left[\frac{1}{2} \alpha T^2 - \alpha T_0 T \right] dA \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

mit Hilfe der Methode der finiten Elemente lösen zu können, wird für die Temperaturen T im Elementinneren der Ansatz benutzt:

$$T = [N] [\theta] \quad (A2.21)$$

In Gleichung A2.21 sind die einzelnen Knotentemperaturen θ_i eines Elements zu einem Vektor $[\theta]$ zusammengefaßt:

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (A2.22)$$

Der Vektor der Formfunktionen $[N]$ ist definiert durch

$$[N] = [N_1, N_2, N_3, \dots, N_i, \dots, N_{20}], \quad (A2.23)$$

wobei die einzelnen Formfunktionen N_i wie bei der Festigkeitsrechnung (Anhang A1.3) definiert sind.

Mit dem Ansatz nach Gleichung A2.21 kann für die benötigten partiellen Ableitungen der Temperatur T geschrieben werden:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [N] [\theta]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [N] [\theta] \quad (A2.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [N] [\theta]$$

Entsprechend folgt für die erste Variation der partiellen Ableitungen:

$$\delta \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [N] \delta[\theta]$$

$$\delta \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [N] \delta[\theta] \quad (A2.25)$$

$$\delta \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [N] \delta[\theta]$$

Damit können in der ersten Variation des Funktional

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \iiint_V \lambda \left[\frac{\partial T}{\partial r} \delta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right] dV \\ & + \iint_{A_q} [\alpha T \delta T - \alpha T_0 \delta T] dA \end{aligned} \quad (A2.26)$$

mit Hilfe der Gleichungen A2.24 und A2.25 die partiellen Ableitungen der Temperatur T durch die Ableitungen der Formfunktionen [N] und den Vektor der Knotentemperaturen [\theta] ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \iiint_V \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [N] [\theta] \frac{\partial}{\partial r} [N] \delta[\theta] \right. \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [N] [\theta] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [N] \delta[\theta] \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial z} [N] [\theta] \frac{\partial}{\partial z} [N] \delta[\theta] \right\} dV \\ & + \iint_{A_q} \{ \alpha [N] [\theta] [N] \delta[\theta] - \alpha [N] [T_0] [N] \delta[\theta] \} dA \\ = & \iiint_V \lambda \delta[\theta]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [N]^T \frac{\partial}{\partial r} [N] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [N]^T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [N] \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial z} [N]^T \frac{\partial}{\partial z} [N] \right\} [\theta] dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{A_q} \alpha \delta[\theta]^T \{ [N]^T [N] [\theta] - [N]^T [N] [T_0] \} dA \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{A2.27}$$

Die einzelnen Ableitungen der Formfunktionen werden zu einer Matrix $[B_T]$ zusammengefaßt. Die Matrix $[B_T]$ ist definiert durch:

$$[B_T] = [[B_{T1}], [B_{T2}], [B_{T3}], \dots, [B_{Ti}]] \tag{A2.28}$$

mit

$$[B_{Ti}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{A2.29}$$

Damit folgt für das Funktional:

$$\begin{aligned}
 \delta \pi &= \iiint_V \delta[\theta]^T \lambda [B_T]^T [B] dV [\theta] \\
 &+ \iint_{A_q} \delta[\theta]^T \alpha [N]^T [N] dA [\theta] \\
 &- \iint_{A_q} \delta[\theta]^T \alpha [N]^T [N] [T_0] dA = 0
 \end{aligned} \tag{A2.30}$$

Gleichung A2.30 muß für jede beliebige Variation $\delta[\theta]$ gültig sein, womit sich eine zur Festigkeitsrechnung analoge Steifigkeitsbeziehung ergibt:

$$[K_T] [\theta] = [F_T]. \tag{A2.31}$$

Die Steifigkeitsmatrix $[K_T]$ ist durch Gleichung A2.30 definiert zu:

$$\begin{aligned} [K_T] = & \iiint_V \lambda [B_T]^T [B_T] dV \\ & + \iint_{A_q} \alpha [N]^T [N] dA \end{aligned} \quad (A2.32)$$

Für den Lastvektor $[F_T]$ ergibt sich ebenfalls aus Gleichung A2.30:

$$[F_T] = \iint_{A_q} \alpha [N]^T [N] [T_0] dA \quad (A2.33)$$

Die Integration über die Elementvolumina V erfolgt nach der gleichen Vorgehensweise wie bei der Festigkeitsrechnung.

Zur Integration über die Oberfläche A_q , welche elementweise erfolgt, ist festzulegen, welche Elementoberflächen zum Randbereich der Struktur gehören. Die Integration erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe der numerischen Integration in den dimensionslosen Koordinaten (ξ, η, ρ) , in denen die Elementgeometrie definiert ist.

Für die Darstellung des Flächenelementes dA in dimensionslosen Koordinaten sind sechs verschiedene Fälle zu unterscheiden, abhängig davon, über welche Elementoberfläche zu integrieren ist. Bild A2.02 zeigt ein 20-Knoten-Element der Serendipity-Klasse, für welches die Tangentenvektoren $d[\eta]$ und $d[\rho]$ sowie das Flächenelement dA und der Flächennormalenvektor $d[A]$ der Fläche 2 eingezeichnet sind.

Die zur Berechnung aller Flächen benötigten Tangentenvektoren lauten als Funktion der dimensionslosen Koordinaten /8/:

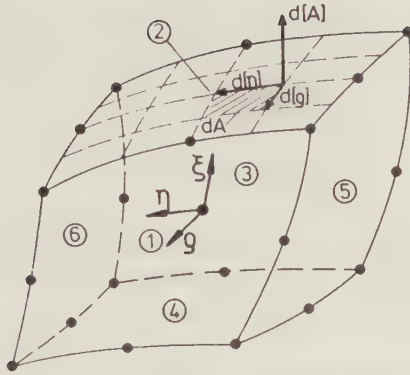


Bild A2.02: Finites 20-Knoten-Element mit Flächenelement dA , Flächennormalenvektor $d[A]$ und Tangentenvektoren $d[\eta]$ und $d[\rho]$ auf der Fläche 2 ($\xi = +1$)

- Tangentenvektor in ξ -Richtung für die Flächen 1,3,5,6:

$$d[\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\xi \quad (A2.34)$$

- Tangentenvektor in η -Richtung für die Flächen 1,2,3,4:

$$d[\eta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\eta \quad (A2.35)$$

- Tangentenvektor in ρ -Richtung für die Flächen 2,4,5,6:

$$d[\rho] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{bmatrix} d\rho \quad (\text{A2.36})$$

Der jeder Fläche zugehörige Flächennormalenvektor läßt sich aus dem Vektorprodukt der entsprechenden Tangentenvektoren berechnen. Es gilt für die jeweiligen Flächen:

- Flächennormalenvektor für die Flächen mit $\xi = \text{const}$:

$$d[A]_{\xi = \text{const}} = d[\eta] \times d[\rho] \, d\eta \, d\rho \quad (\text{A2.37})$$

- Flächennormalenvektor für die Flächen mit $\eta = \text{const}$:

$$d[A]_{\eta = \text{const}} = d[\rho] \times d[\xi] \, d\rho \, d\xi \quad (\text{A2.38})$$

- Flächennormalenvektor für die Flächen mit $\rho = \text{const}$:

$$d[A]_{\rho = \text{const}} = d[\xi] \times d[\eta] \, d\xi \, d\eta \quad (\text{A2.39})$$

Das jeweilige Flächenelement dA kann aus dem Flächennormalenvektor durch einfache Betragsbildung berechnet werden:

$$dA = |d[A]| = \sqrt{dA_r^2 + dA_\varphi^2 + dA_z^2} \quad (\text{A2.40})$$

$$\text{mit } d[A] = \begin{bmatrix} dA_r \\ dA_\varphi \\ dA_z \end{bmatrix}$$

Die Berechnung der Tangentenvektoren $d[\xi]$, $d[\eta]$ und $d[\rho]$ erfordert keinen zusätzlichen Programmieraufwand, da die einzelnen Komponenten der Vektoren in der ohnehin zur numerischen Volumenintegration benötigten Jakobi-Matrix enthalten sind,

wie ein Vergleich der Gleichungen A2.34 bis A2.36 mit der bereits in Anhang 1 durch Gleichung A1.18 definierten Jakobi-Matrix zeigt.

Anhang 3

Eigenwertberechnung nach dem Finite-Element-Verfahren

A3.1 Bestimmung der Eigenwertgleichung

Im folgenden wird gezeigt, wie nach der Methode der finiten Elemente eine Eigenwertgleichung erstellt werden kann. Um zu der benötigten Eigenwertgleichung zu gelangen, wird zunächst von der allgemeinen Steifigkeitsbeziehung

$$[K] [a] = [F] \quad (A1.37)$$

ausgegangen, die in Anhang A1.6 hergeleitet ist. In Gleichung A1.37 sind nunmehr sowohl der Verformungsvektor $[a]$ als auch der Lastvektor $[F]$ nicht nur orts-, sondern auch zeitabhängig:

$$[a] = [a](t)$$

$$[F] = [F](t)$$

Zur Berechnung des Lastvektors $[F]$ kann Gleichung A1.39 benutzt werden, indem dort nur derjenige Term berücksichtigt wird, durch den der Lastvektor aufgrund einer Volumenkraft $[p]$ definiert ist:

$$[F_p] = \int_V [N]^T [p] dV \quad (A3.01)$$

Die Volumenkraft $[p]$ hat den Charakter einer spezifischen, auf das Volumen bezogenen Massenträgheit. Nach dem d'Alembertschen Prinzip kann für die Massenträgheit

$$[p] = -\rho [\ddot{f}] \quad (A3.02)$$

gesetzt werden mit ρ als Dichte.

Für die zweite Ableitung des Verformungsvektors nach der Zeit $[\ddot{f}]$ kann mit Gleichung A1.07

$$[f] = [N] [a],$$

welche die Verformungen im Elementinnern in Abhängigkeit von den Knotenverformungen $[a]$ darstellt, geschrieben werden:

$$[\dot{f}] = [N] [\dot{a}] \quad (A3.03)$$

Indem die Gleichungen A3.02 und A3.03 in die Gleichung A3.01 eingesetzt werden, bestimmt sich der Lastvektor $[F]$ als Funktion der Knotenverformungen $[a]$ zu:

$$[F] = -\rho \int_V [N]^T [N] [\dot{a}] dV \quad (A3.04)$$

bzw. zu:

$$[F] = -[M] [\dot{a}] \quad (A3.05)$$

mit

$$[M] = \rho \int_V [N]^T [N] dV \quad (A3.06)$$

Die Matrix $[M]$ wird als Massenmatrix bezeichnet.

Wird der Lastvektor $[F]$ in der Steifigkeitsbeziehung durch Gleichung A3.05 ersetzt, ergibt sich:

$$[K] [a] + [M] [\dot{a}] = 0 \quad (A3.07)$$

Zur Lösung dieser zeitabhängigen Differentialgleichung wird der Vektor $[a]$ in einen ortsabhängigen Faktor $[\hat{a}]$ und einen zeitabhängigen Faktor $e^{i\omega t}$ aufgespalten:

$$[a] = [\hat{a}] e^{i\omega t} \quad (A3.08)$$

Damit folgt für die zweite Ableitung nach der Zeit

$$[\ddot{a}] = -\omega^2 [\hat{a}] e^{i\omega t}, \quad (A3.09)$$

so daß für Gleichung 3.07 geschrieben werden kann:

$$([K] - \omega^2 [M]) [a] = 0 \quad (A3.10)$$

Gleichung A3.10 beschreibt das Eigenwertproblem. Diese Gleichung hat nur dann nichttriviale Lösungen für beliebige Vektoren $[\hat{a}] \neq 0$, wenn gilt:

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Aus der Determinante ergeben sich im allgemeinen n verschiedene positive Werte für ω^2 , falls es sich bei den Matrizen $[K]$ und $[M]$ um $n \times n$ -Matrizen handelt. Die Eigenfrequenzen f_i berechnen sich daraus zu:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

Zu jeder Eigenfrequenz f_i ist durch Gleichung A3.10 jeweils ein Eigenvektor $[\hat{a}]$ definiert, der nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt werden kann, so daß lediglich die Größenverhältnisse der einzelnen Verformungen untereinander berechnet werden können. Die unmittelbare Berechnung der Koeffizientendeterminante gelingt nur für relativ kleine Matrizen, so daß für Matrizen in der Größenordnung, wie sie sich z. B. bei der Eigenwertberechnung von Radialradschaufeln ergeben, ein Iterationsverfahren anzuwenden ist.

A3.2 Lösung der Eigenwertgleichung

Bei der Auswahl eines geeigneten Iterationsverfahrens aus der relativ großen Anzahl zur Verfügung stehender Lösungsmethoden sind sowohl die Größe der Steifigkeits- und Massentrizen und insbesondere ihre Bandstruktur als auch die spezifischen Beschränkungen der zur Verwendung gelangenden Rechenkapazitäten zu berücksichtigen /4/.

Aufgrund der relativ großen Matrizen kommt für die Eigenwertberechnung nur ein Iterationsverfahren in Frage, wobei im Rahmen dieser Arbeit das Verfahren der einfachen Vektoriteration angewendet worden ist. Dabei sind bewußt die spezifischen Nachteile dieses Verfahrens in Kauf genommen worden, die sich in einem schlechten Konvergenzverhalten äußern, falls zwei aufeinander folgende Eigenwerte dicht beieinander liegen. Bei der für diese Berechnungen benutzten Rechanlage (Typ Cyber 830) war die Frage der benötigten Rechenzeit dem Speicherplatzproblem untergeordnet.

Um die n kleinsten Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ der Eigenwertgleichung

$$([K] - \lambda [M]) [U] = 0 \quad (A3.11)$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren $[U]_i$ zu berechnen, wird eine Folge von iterierten Vektoren $[U]_i^K$ gebildet. Der hochgestellte Index K gibt den jeweiligen Iterationsschnitt an. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$[K] [a]_i^K = [M] [U]_i^{K-1}, \quad (A3.12)$$

wobei mit einem beliebigen Startvektor $[U]_i^0$ begonnen werden kann, der jedoch keine Nullkomponenten nach dem zu iterierenden Eigenvektor $[U]_i$ besitzen darf.

Ein einzelner Iterationsschnitt erfordert zunächst die Multiplikation des Vektors $[U]_i^{K-1}$ mit der Massenmatrix $[M]$. Als Ergebnis ergibt sich ein Vektor $[h]$, für den nach Gleichung A3.12 gilt:

$$[K] [U]_i^K = [h] \quad (A3.13)$$

Um den Vektor $[U]_i^K$ aus Gleichung A3.13 zu berechnen, kann diese mit der invertierten Steifigkeitsmatrix $[K]^{-1}$ von links multipliziert werden:

$$[U]_i^K = [K]^{-1} [h] \quad (A3.14)$$

Da eine Invertierung von Matrizen in der hier vorliegenden Größenordnung ausgeschlossen ist, muß der Vektor $[U]_i^K$ durch Auflösen des Gleichungssystems A3.13 berechnet werden. Mit der vor der Iteration durchgeführten Choleskyzerlegung /4/ der Steifigkeitsmatrix in

$$[K] = [L] [L]^T,$$

kann für Gleichung A3.13 geschrieben werden:

$$[L] [L]^T [U]_i^K = [h] \quad (A3.15)$$

Die Matrix $[L]$ ist die Linksdreieckmatrix aus der Choleskyzerlegung der Matrix $[K]$.

Die Berechnung von $[U]_i^K$ nach Gleichung A3.15 erfolgt durch die Prozesse des Vorwärts- und Rückwärtseinsetzens.

Der Eigenwert λ_i berechnet sich in guter Näherung aus dem Rayleighschen Quotienten:

$$\lambda_i = R = \frac{[U]_i^T [K] [U]_i}{[U]_i^T [M] [U]_i} \quad (A3.16)$$

Anhang 4

Messung der Geschwindigkeitsverteilung mit dem Laser-Zwei-Fokus-Verfahren

In diesem Anhang wird das Funktionsprinzip des Laser-Zwei-Fokus-Verfahrens (L2F-Verfahren) beschrieben, welches mit der Möglichkeit der berührungsfreien Messung des Geschwindigkeitsvektors die Voraussetzung besitzt, im rotierenden Laufrad die Geschwindigkeitsverteilung bestimmen zu können. Neben dem Funktionsprinzip des Meßverfahrens sind die Bedingungen, die eine Messung im rotierenden Laufrad ermöglichen, näher beschrieben.

A4.1 Funktionsprinzip des Meßverfahrens

Das Funktionsprinzip des zur Versuchsdurchführung verwendeten L2F-Meßgerätes ist in Bild A4.01 anhand des Strahlenganges im optischen Teil der Meßeinrichtung dargestellt /38/.

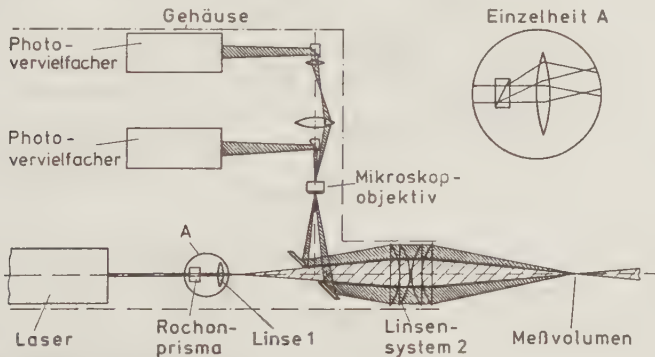


Bild A4.01: Strahlengang des L2F-Gerätes

Ein Laserstrahl wird mit Hilfe eines Prismas in zwei Teilstrahlen aufgespalten (Einzelheit A in Bild A4.01). Im Teilungspunkt der beiden Strahlen befindet sich der Brennpunkt

der Linse L_1 , welche in ihrem zweiten Brennpunkt eine Lichtschranke bestehend aus den beiden fokussierten Teilstrahlen erzeugt. Die Linse L_2 bildet diese Lichtschranke in das Meßvolumen außerhalb des Gehäuses ab.

Die geometrischen Abmessungen des Meßvolumens werden durch den Ablenkwinkel des Rochonprismas und die Brennweite der Linse L_1 festgelegt /38/. Bei dem für die Versuche verwendeten Meßgerät beträgt der Durchmesser der beiden Fokuspunkte $d = 10\mu\text{m}$ und der Abstand $s = 0,42\text{ mm}$ (Bild A4.02). Die axiale Erstreckung des Meßvolumens beträgt $l = 0,9\text{ mm}$, wenn diejenigen Stellen als Grenzen angenommen werden, bei denen die Intensität noch 25 % der Maximalintensität beträgt.

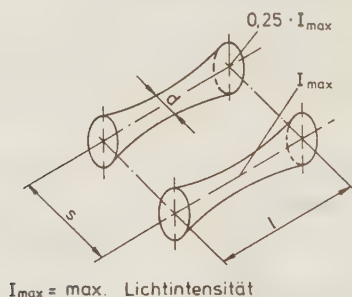


Bild A4.02: Geometrie des Meßvolumens

Passiert ein von der Strömung mitgeführtes Teilchen das Meßvolumen, so werden Streulichtimpulse erzeugt, welche von dem äußeren Bereich des Linsensystems 2 aufgenommen werden und im Brennpunkt eines Mikroskopobjektives abgebildet werden. Nach Vergrößerung durch das Mikroskopobjektiv gelangen die beiden Streulichtimpulse getrennt auf zwei Fotovervielfacher, die die Lichtimpulse in elektrische Signale umwandeln. Ein Motor gestattet die Verdrehung des Prismas, so daß die jeweilige Position der Laserstrahlen im Meßvolumen der Strömungsrichtung angepaßt werden kann.

Bild A4.03 zeigt die L2F-Optik in Meßposition vor dem Versuchsstand.

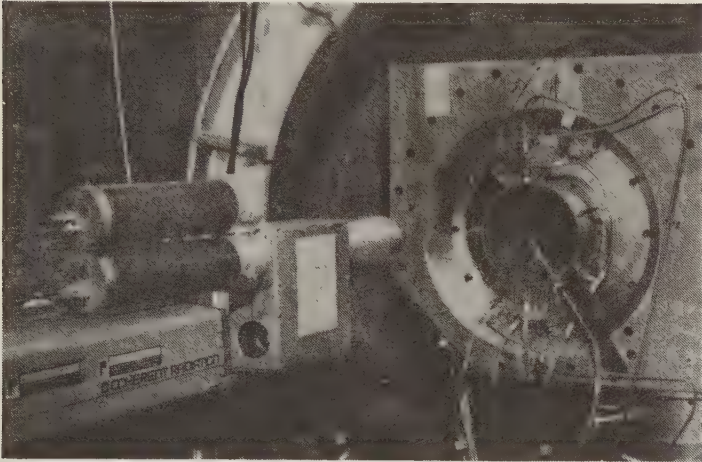


Bild A4.03: L2F-Meßgerät in Meßposition

Die gemessene, örtliche Geschwindigkeit V ergibt sich aus der gemessenen Zeitdifferenz zweier aufeinanderfolgender Streulichtimpulse Δt und dem bekannten Abstand der Fokuspunkte im Meßvolumen zu

$$V = \frac{s}{\Delta t} .$$

Der turbulente Charakter der Strömung sowie die Tatsache, daß auch dann durch zwei unabhängige Teilchen Doppelimpulse erhalten werden, wenn die Fokuspunkte nicht in Strömungsrichtung ausgerichtet sind, erfordern eine statistische Auswertung einer Vielzahl durchgeführter Messungen. Die dazu erforderliche Auswerteelektronik ist in Bild A4.04 als Blockschaltbild und in Bild A4.05 als Meßaufbau dargestellt.

Die von den Fotovervielfachern (FV) in elektrische Impulse umgewandelten Teilchensignale werden nach Verstärkung mit Hilfe von zwei Diskriminatoren in Normimpulse umgewandelt,

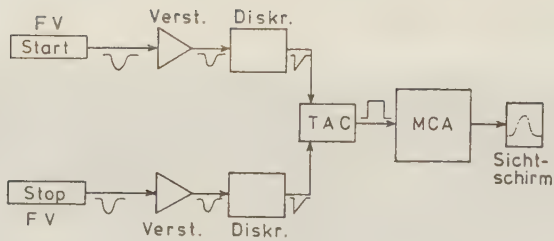


Bild A4.04: Blockschaltbild der Auswerteelektronik beim L2F-Verfahren

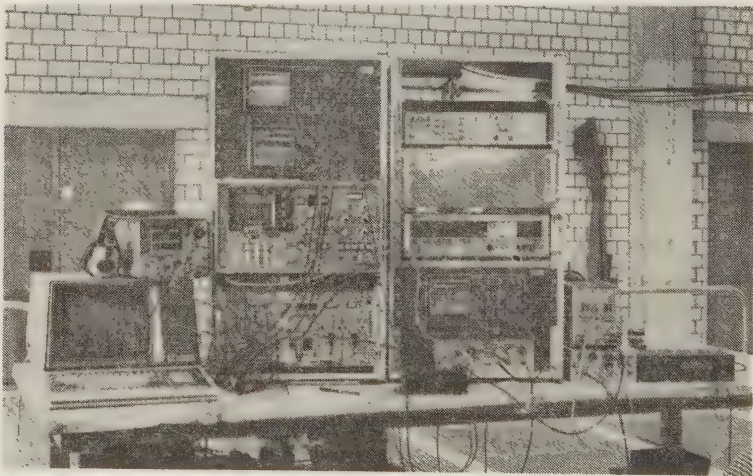


Bild A4.05: Ansicht der Auswerteelektronik

welche durch konstante Amplitude und durch kurze Anstiegszeiten charakterisiert sind. Ferner ist das Streulichtsignal nach Passieren der Diskriminatoren von störendem Rauschanteil befreit. Den Diskriminatoren ist das eigentliche Zeitintervallmeßgerät nachgeschaltet (TAC = Time Amplitude Converter),

dessen analysierte Meßwerte auf einem nachfolgenden Vielkanal-analysator (MCA = Multi Chanel Analyser) graphisch als Häufigkeitsverteilung dargestellt werden.

Zur exakten Positionierung des Meßvolumens auf die Meßstellen im Strömungskanal ist eine 5-achsig steuerbare Traversiereinrichtung verwendet worden, die in Bild A4.06 dargestellt ist.

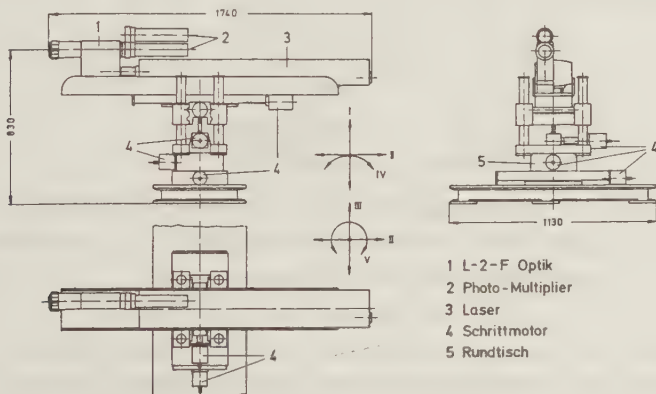


Bild A4.06: Traversiereinrichtung mit aufgesetztem L2F-Meßgerät und Laser

Neben den drei translatorischen Achsen besitzt die Traversiereinrichtung zwei weitere rotatorische Achsen, so daß im Zusammenhang mit der Verdrehbarkeit des Rochon-Prismas in der L2F-Optik eine vollständige 6-achsige Verstellbarkeit des Meßvolumens gewährleistet ist. Die Steuerung der Achsen mit Hilfe von Schrittmotoren stellt in Verbindung mit einer digitalen Anzeige der einzelnen Koordinaten sicher, daß die gewünschte Meßstelle genau angefahren werden kann.

A4.2 Messung im rotierenden Laufrad

Die Anwendung dieses Meßverfahrens im rotierenden System erfordert einige zusätzliche Maßnahmen. Da der Meßaufbau raumfest plaziert ist, wird im Laufrad die Absolutkomponente $\vec{c}$ der Strömung gemessen. Die Relativgeschwindigkeit $\vec{w}$ kann hieraus unmittelbar berechnet werden, da mit dem gemessenen Absolutgeschwindigkeitsvektor nach Richtung α und Betrag c sowie der mit der Meßposition bekannten Umfangsgeschwindigkeit $\vec{u}$ die Relativgeschwindigkeit $\vec{w}$ sowohl nach Richtung und Betrag aus dem Geschwindigkeitsdreieck festliegt (Bild A4.07).



Bild A4.07: Zur Berechnung der Relativgeschwindigkeit w aus gemessener Absolutgeschwindigkeit c_{L2F} und gemessenem Absolutwinkel α_{L2F}

Aufgrund der raumfesten Position des Meßvolumens bewegen sich die einzelnen Strömungskanäle mit der Umfangsgeschwindigkeit u am Meßvolumen vorbei. Um eine angenähert punktweise Messung in Umfangsrichtung sicherzustellen, ist der Strömungskanal in sogenannte Meßfenster einzuteilen, innerhalb derer das Meßsystem aktiv sein muß und außerhalb derer keine Messungen von der Auswertelektronik akzeptiert werden dürfen (Bild A4.08).

Die Erzeugung des Meßfensters ist auf elektronischem Wege realisiert worden. Das Blockschaltbild der Steuerelektronik ist in Bild A4.09 dargestellt. Die zugehörige Zeitabfolge der elektronischen Impulse zeigt Bild A4.10. Von einer Zahnscheibe auf der Welle des Versuchsstandes werden mit Hilfe eines induktiven Gebers Impulse erzeugt, welche die jeweilige Position der Welle bzw. des Laufrades festlegen (Impuls a in Bild A4.10).

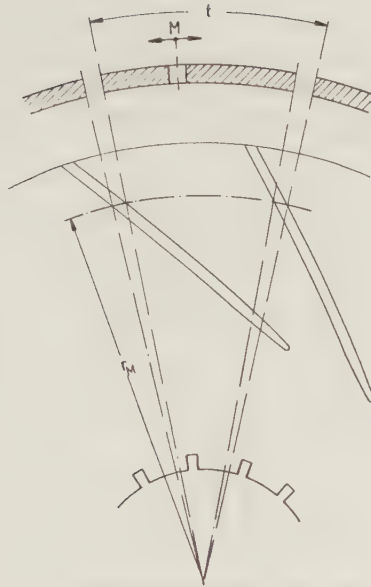


Bild A4.08: Zur Position des Meßfensters M bei Messung im rotierenden Laufrad auf dem Radius r_M

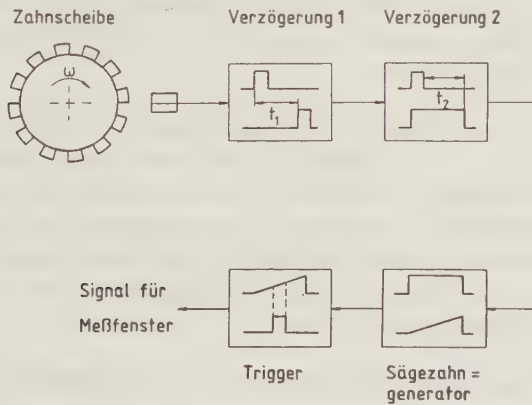


Bild A4.09: Blockschaltbild der Steuerelektronik zur Erzeugung des Meßfensters

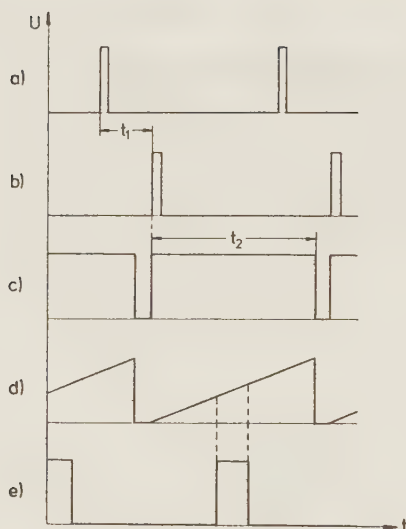


Bild A4.10: Signalfolge der Steuerelektronik

Die Geberimpulse können um eine einstellbare Zeitdauer t_1 verzögert werden, da wegen der rückwärts gekrümmten Schaufeln auf verschiedenen Meßradien die Zeitpunkte des Gebersignals nicht mit dem Schaufeldurchgang durch das Meßvolumen zusammenfallen (Bild A4.08).

Mit Hilfe eines zweiten Verzögerungsgliedes wird die Verzögerungszeit t_2 so eingestellt, daß sich das in Bild A4.10 dargestellte Signal c) genau im Strömungskanal zwischen zwei Schaufeldurchgängen befindet. Diese Einstellung kann im Betrieb gut durchgeführt werden, da die Schaufeldurchgänge durch das Meßvolumen als Streulichtimpulse auf dem Oszilloskop deutlich erkennbar sind.

Zwischen den abfallenden und ansteigenden Impulsflanken des Signals c) wird mit Hilfe eines Regelkreises eine Sägezahnspannung generiert, welche eine konstante Endspannung besitzt

(Signal d). Aus dieser wird mit Hilfe zweier Trigger das Meßfenster (Signal e) abgeleitet. Durch Verändern der Trigger-niveaus kann sowohl die Lage des Meßfensters innerhalb des Strömungskanal als auch dessen Breite eingestellt werden.

Literaturverzeichnis

- / 1/ Zienkiewicz, O.C. Methode der finite Elemente
C. Hanser Verlag, München Wien 1984
- / 2/ Gallagher, R.H. Finite-Element-Analysis
Springer Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1984
- / 3/ Bathe, K.-J.; Numerical Methods in Finite Element
Wilson, E.L. Analysis
Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- / 4/ Schwartz, H.R. Methode der finiten Elemente
Teubner Studienbücher, Stuttgart
1980
- / 5/ Lehmann, T. Elemente der Mechanik
Vieweg Verlag, Braunschweig 1984
- / 6/ Bourne, D.E.; Vektoranalysis
Kendall, P.C. Teubner Verlag, Stuttgart 1973
- / 7/ Jordan-Engeln, G. Numerische Mathematik für Ingenieure
BI Hochschultaschenbücher, Mannheim
1978
- / 8/ Bronstein, I.N.; Taschenbuch der Mathematik
Semendjajew, K.A. Verlag Harri Deutsch, Thun 1984
- / 9/ Fister, W. Fluidenergiemaschinen
Springer Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1984
- /10/ Traupel, W. Thermische Turbomaschinen
Springer Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1968
- /11/ Hülsen, H. Beitrag zur Analyse des Spannungs-
Dehnungsverhaltens von Radialver-
dichterlaufrädern
Diss. Ruhr-Universität Bochum 1980

- /12/ Heiderich, H. Ermittlung der Verformungen und Spannungen in Radialverdichterlaufrädern mit Deckscheibe und rückwärts gekrümmten prismatischen Schaufeln
Diss. Ruhr-Universität Bochum 1977
- /13/ Pack, M. Ein Beitrag zur Spannungsanalyse von Radialverdichterlaufrädern
Diss. Ruhr-Universität Bochum 1873
- /14/ Fister, W. und H. Heiderich Untersuchungen über den Einfluß von einigen geometrischen Parametern auf den Verformungs- und Spannungszustand von Radialverdichterlaufrädern
VDI-Berichte, Nr. 264, 1976
- /15/ Fister, W. und H. Heiderich Rechnerische Verformungs- und Spannungsermittlung von Radialpumpenlaufrädern unter Berücksichtigung von Fluid- und Fliehkräften
Pumpentagung Karlsruhe, 1978
- /16/ Fister, W. und M. Geller Dreiachsige Spannungs- und Dehnungsanalyse von Radialverdichterlaufrädern
VDI-Berichte, Nr. 572, 1985
- /17/ Biallowons, G. Kurzfristig durchführbare Spannungsberechnung für geschlossene Radialverdichterräder mit Gitterrostelementen
Fortschr.-Bericht, Reihe 7, Nr.75, VDI-Verlag, Dusseldorf 1983
- /18/ Wellinger, K.; Gimmel, P.; Bodenstein, M. Werkstoff-Tabellen der Metalle
A. Kröner Verlag, Stuttgart 1972

- /19/ Raznjevic, K. Thermodynamische Tabellen
VDI-Verlag, Düsseldorf 1977
- /20/ Biezeno, C.B.; Technische Dynamik
Grammel, R. Springer Verlag, Berlin 1939
- /21/ Böhm, J. Theoretische und experimentelle
Parameterstudien an schwingenden
Turbinenschaufeln im Fliehkraftfeld
Diss. TU Hannover 1978
- /22/ Vogt, H.J. Zur Berechnung der Eigenfrequenzen
und Eigenformen von Schaufeln ther-
mischer Turbomaschinen mit Hilfe
eines gekrümmten finiten Schalen-
elementes
Diss. TU Hannover 1974
- /23/ Montoya, J.G. Gekoppelte Biege- und Torsions-
schwingungen einer stark verwun-
denen rotierenden Schaufel
BBC Mitteilungen 53, 1966
- /24/ Irretier, M. Die Berechnung der Schwingungen
rotierender, beschauelter Scheiben
mittels eines Anfangswertverfahrens
Diss. TU Hannover 1978
- /25/ Mak, S.W. und Substructures Analysis of Impeller
M. Botman Vibration Modes
ASME 75-DET-112, June 1975
- /26/ Kuo, P.S. Finite Element Approach to the
Vibration Analysis of Elastic Disks
on a Flexible Shaft
ASME 75-GT-57, December 1975
- /27/ Barton, M.V. Vibration of rectangular and skew
cantilever plates
J. Appl.-Mechanics 18, 1951

- /28/ Lindorf, H. Technische Temperaturmessungen
Verlag W. Giradet, Essen 1968
- /29/ Pepperhoff, W. Temperaturstrahlung
Steinkopff Verlag, Darmstadt 1956
- /30/ Weichert, L. Temperaturmessung in der Technik
Expert Verlag, Grafenau 1981
- /31/ Walther, L.;
Gerber, D. Infrarotmeßtechnik
VEB Verlag Technik, Berlin 1983
- /32/ Euler, J.;
Ludwig, R. Arbeitsmethoden der optischen
Pyrometrie
Verlag C. Braun, Karlsruhe 1960
- /33/ N.N. Technische Temperaturmessung
VDI-Berichte 122, VDI-Verlag,
Düsseldorf 1966
- /34/ Lieneweg, F. Handbuch der technischen Temperatur-
messung
Vieweg Verlag, Braunschweig 1976
- /35/ Hudson, R.D. Infrared System Engineering
Verlag John Wiley and Sons,
New York London Sydney Toronto 1969
- /36/ Bergmann, L.;
Schaefer, C. Lehrbuch der Experimentalphysik
Verlag W. de Gryter, Berlin 1966
- /37/ Schröder, G. Technische Optik
Vogel-Verlag, Würzburg 1974
- /38/ Schodl, R. Entwicklung des Laser-Zwei-Fokus-
Verfahrens für die berührungslose
Messung der Strömungsvektoren, ins-
besondere in Turbomaschinen
Diss. TH Aachen 1977
- /39/ Krain, H. Experimental Observation of the
Flow in Impellers and Diffusors
v. Karman Institute for Fluid
Dynamics, Lecture Series 1984

- /40/ Fister, W. Sichtbarmachung der Strömung in
Radialverdichterstufen, besonders
der Relativströmung in rotierenden
Laufrädern, durch Funkenblitze
BWK 18, 1966
- /41/ Fister, W.; Expanded Application Programs of
Eickelmann, J.; the Spark Tracer Method with Regard
Witzel, U. to Centrifugal Compressor Impellers
Int. Symposium on Flow Visualisation
Bochum 1980, Preprint
- /42/ Eck, B. Technische Strömungslehre
Springer Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1976
- /43/ Gersten, K. Einführung in die Strömungsmechanik
Bertelsmann Verlag, Düsseldorf 1974
- /44/ Schlichting, H. Grenzschichttheorie
Verlag G. Braun, Karlsruhe 1965
- /45/ Eckert, E. Wärme- und Stoffaustausch
Springer Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1966
- /46/ Brauer, H. Grundlagen der Einphasen- und
Mehrphasenströmungen
Verlag Sauerländer, Aarau 1971
- /47/ Gregorig, R. Wärmetausch und Wärmetauscher
Verlag Sauerländer, Aarau 1973
- /48/ v. Karman, T. Über laminare und turbulente Reibung
Zeitschrift für angewandte Mathe-
matik und Mechanik, Nr. 4, 1921
- /49/ Dorfmann, L.A. Thermal Boundary Layer on a Rotating
Disk
Sovjet Physiks Doklady, Nr. 3, 1958

- /50/ Hartnett, J.P. Heat Transfer from a Nonisothermal
Disk Rotating in Still Air
Journal of Applied Mechanics,
Vol. 26, 1959
- /51/ Hartnett, J.P. Heat Transfer to a Nonisothermal
Rotating Disk With a Turbulent
Boundary Layer
Journal of Heat Transfer, 8/1965
- /52/ Eckert, B.; Axial- und Radialkompressoren
Schnell, E. Springer Verlag, Berlin Göttingen
Heidelberg 1961
- /53/ Truckenbrodt, E. Fluidmechanik
Springer Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1980
- /54/ Fister, W. und Berechnung der reibungsbehafteten
G. Neumann kompressiblen Strömung durch Spalte
mit bewegten Wänden
VDI Bericht 572, VDI-Verlag,
Düsseldorf 1985
- /55/ Fister, W. und Versuchseinrichtung für Radialver-
J. Kotzur dichtereinstufen
BWK Bd. 20, 1968

L e b e n s l a u f

29.06.1954	geboren in Aachen verheiratet Vater: Prof. Dr.-Ing. F-J. Geller Mutter: Sophia Geller, geb. Beuten
1962 - 1966	Besuch der Volksschule in Bochum
1966 - 1972	Besuch des Goethe-Gymnasiums in Bochum Abschluß: Abitur
1972 - 1974	Wehrdienst Leutnant d. Res.
1974 - 1980	Studium des Maschinenbaus an der Ruhr-Universität Bochum Abschluß: Diplom
1975 - 1980	Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl für Mechanik II, Ruhr-Universität Bochum
seit 1980	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidenergiemaschinen, Ruhr-Universität Bochum

FOTODRUCK J. MAINZ GmbH
Neupforte 13, Nähe Markt, D-5100 Aachen
Telefon: (0241) 27305 und (0241) 38606